

**Zadanie 1.**

W pewnej populacji każde ryzyko charakteryzuje się trzema parametrami  $q$ ,  $b$  oraz  $v$ , o następującym znaczeniu:

- parametr  $q$  to prawdopodobieństwo, że do szkody dojdzie (może zajść co najwyżej jedna szkoda),
- jeśli już do szkody dojdzie, to rozkład jej wartości ma wartość oczekiwaną równą  $b$  i wariancję równą  $b^2v^2$ .

Parametr  $v^2$  dla wszystkich ryzyk z populacji przyjmuje tę samą wartość równą  $1/5$ . Niejednorodność populacji znajduje wyraz w zróżnicowanych wartościach pozostałych dwóch parametrów. Wartości parametrów  $(q,b)$  losowo dobranego ryzyka z tej populacji to realizacja pary zmiennych losowych  $(Q,B)$ , o której wiemy, że:

- $E(Q) = 0.1$ ,
- $var(Q) = 0.01$ ,
- $var(B) = \frac{1}{4}[E(B)]^2$ ,
- zmienne  $Q$  i  $B$  są niezależne.

Niech  $W_n$  oznacza łączną wartość szkód z portfela liczącego  $n$  ryzyk niezależnie wylosowanych z tej populacji. Liczba  $n$ , dla której zachodzi:

$$\frac{\sqrt{var(W_n)}}{E(W_n)} = 0.1,$$

wynosi:

- (A) 1400
- (B) 1350
- (C) 1300
- (D) 1250
- (E) 1200

**Zadanie 2.**

Pewien podmiot maksymalizuje wartość oczekiwaną funkcji użyteczności o postaci:  
 $u(x) = -\exp(-x)$ .

Tymczasem majątek tego podmiotu wynosi  $w$ , może on jednak zostać zredukowany o stratę w wysokości 1, co może nastąpić z prawdopodobieństwem  $q$ .

Od ryzyka tej straty można się na rynku ubezpieczyć. Rynek oferuje kontrakty z udziałem własnym ubezpieczonego, z parametrem  $\alpha \in (0,1]$ , takie że:

- składka za kontrakt wynosi  $(1 + \theta) \cdot q \cdot \alpha$ ,
- odszkodowanie w razie zajścia szkody wyniesie  $\alpha$

Jeśli założymy, że  $\theta = 1/5$  zaś  $q = 1/6$ , wtedy podmiot, o którym mowa, osiągnie maksimum oczekiwanej użyteczności wybierając kontrakt z pokryciem równym (wybierz najlepsze przybliżenie):

- (A)  $\alpha \approx 69\%$
- (B)  $\alpha \approx 72\%$
- (C)  $\alpha \approx 75\%$
- (D)  $\alpha \approx 78\%$
- (E)  $\alpha \approx 81\%$

**Zadanie 3.**

Zmienna losowa  $X$  jest sumą trzech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych Poissona z parametrami odpowiednio  $(\lambda_1, F_1)$ ,  $(\lambda_2, F_2)$ , oraz  $(\lambda_3, F_3)$ .

Wartości parametrów częstotliwości to  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , oraz dystrybuanty  $F_1, F_2, F_3$ , dane są wzorami:

$i$	$\lambda_i$	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $1 \leq x < 2$	$F_i(x)$ dla $x \geq 2$
1	2	0	0,2	1
2	1	0	0,4	1
3	1	0	0,8	1

Przy tych założeniach parametr  $a$  wzoru:

- $\Pr(X = 4) = a \exp(-b)$

wynosi:

(A)  $6 \frac{1}{6}$

(B)  $7 \frac{5}{12}$

(C)  $8 \frac{2}{3}$

(D)  $9 \frac{11}{12}$

(E)  $11 \frac{1}{6}$

**Zadanie 4.**

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki z zerową nadwyżką początkową:

$$U(t) = ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \text{ gdzie:}$$

- $ct$  jest sumą składek zgromadzonych do momentu  $t$ ,
- $N(t)$  jest procesem Poissona z parametrem intensywności  $\lambda$
- wartości szkód  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  są i.i.d, niezależne od procesu  $N(t)$ .

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy tylko tyle, że:

- $\Pr(Y_1 \in [0,1]) = 1$ ,
- $E(Y_1) = 1/5$ .

Wiemy też, że  $c > \frac{\lambda}{5}$ .

Wobec tego wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny (pod warunkiem że do ruiny dojdzie) może przyjmować różne wartości. Przedział, który zawiera wszystkie te wartości (i nic ponadto) jest postaci:

(A)  $\left[ \frac{1}{10}, \frac{1}{5} \right]$

(B)  $\left[ \frac{1}{15}, \frac{1}{3} \right]$

(C)  $\left[ \frac{1}{15}, \frac{1}{5} \right]$

(D)  $\left[ \frac{1}{10}, \frac{1}{2} \right]$

(E)  $\left[ \frac{1}{5}, \frac{1}{2} \right]$

**Zadanie 5.**

W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym nadwyżka początkowa wynosi 2.5, składka roczna wynosi 2, a łączne wartości szkód w kolejnych latach  $W_1, W_2, W_3, \dots$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie danym wzorem:

$$\Pr(W_1 = k) = 0.6(0.4)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Prawdopodobieństwo ruiny wynosi:

(A)  $\frac{8}{27}$

(B)  $\frac{8\sqrt{2}}{27\sqrt{3}}$

(C)  $\frac{16}{81}$

(D)  $\frac{16\sqrt{2}}{81\sqrt{3}}$

(E)  $\frac{32}{243}$

**Zadanie 6.**

W pewnym ubezpieczeniu mamy do czynienia z ciągłym, stopniowym wzrostem liczby ryzyk w portfelu, co wyraża założenie, iż zmienna  $T_1 \in (0,1)$  oznaczająca moment zajścia losowo wybranej szkody z tego portfela w ciągu roku (o ile oczywiście do szkody dojdzie) ma rozkład dany gęstością:

- $f_{T_1}(t) = \frac{\exp(0.1t)}{10(\exp(0.1)-1)}$

Niech  $T_2$  oznacza odstęp w czasie od momentu zajścia szkody do jej likwidacji. Zmienna ta ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 1 (rok).

Zakładamy że zmienne losowe  $T_1$  oraz  $T_2$  są niezależne. Prawdopodobieństwo, iż szkoda, do której doszło w ciągu roku, pozostanie nie-zlikwidowana na koniec tego roku, z dobrym przybliżeniem wynosi:

- (A) 64%
- (B) 67%
- (C) 70%
- (D) 73%
- (E) 77%

**Zadanie 7.**

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym:

- skumulowana wartość szkód jest procesem złożonym Poissona, w którym intensywność pojawiania się szkód wynosi 300, zaś pojedyncze szkody są niezależne od siebie i od procesu pojawienia się szkód, i mają rozkład dany na półosi dodatniej gęstością:

$$f(x) = \frac{1}{12} \exp\left(-\frac{1}{8}x\right) + \frac{1}{48} \exp\left(-\frac{1}{16}x\right)$$

- intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi 3600.

Wiadomo, że przy takich założeniach funkcja prawdopodobieństwa ruiny (jako funkcja wysokości nadwyżki początkowej  $u$ ) jest postaci:

$$\Psi(u) = a_1 \exp(-r_1 u) + a_2 \exp(-r_2 u)$$

Suma parametrów tego wzoru ( $a_1 + a_2$ ) wynosi:

(A)  $\frac{4}{5}$

(B)  $\frac{5}{6}$

(C)  $\frac{6}{7}$

(D)  $\frac{7}{8}$

(E)  $\frac{8}{9}$

**Zadanie 8.**

Rozważamy łączną wartość szkód z pewnego portfela ryzyk w roku ubiegłym:

- $X_0 = Y_1^0 + \dots + Y_{N_0}^0$ ,

oraz w roku nadchodzącym:

- $X_1 = Y_1^1 + \dots + Y_{N_1}^1$ .

Wiemy, że  $N_0$  i  $N_1$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona( $\lambda$ ).

O zmiennych  $Y_1^0, Y_1^1, Y_2^0, Y_2^1, Y_3^0, Y_3^1, \dots$  wiemy, że są – przy danej wartości parametru ryzyka  $\Theta$  – warunkowo niezależne, niezależne także od zmiennych  $N_0$  i  $N_1$ , oraz mają identyczny (warunkowy) rozkład o momentach pierwszych dwóch rzędów danych wzorami:

- $E(Y_1^0 | \Theta) = \Theta$ ,
- $var(Y_1^0 | \Theta) = \Theta^2 V_Y^2$ .

Parametr ryzyka  $\Theta$  jest zmienną losową. Przyjmijmy oznaczenia:

- $E(\Theta) = \mu$
- $var(\Theta) = \mu^2 V_\Theta^2$ .

Zakładamy, że znamy wartości parametrów  $\lambda, \mu, V_Y^2, V_\Theta^2$ , oraz iż zaobserwowaliśmy za rok ubiegły realizacje  $N_0$  oraz  $X_0$ . Okazuje się, że najlepszy liniowy nieobciążony predyktor łącznej wartości szkód w roku nadchodzącym można uprościć do postaci:

- $BLUP(X_1 | N_0, X_0) = \lambda\mu + a(X_0 - \mu N_0)$ ,

gdzie współczynnik  $a$  jest następującą funkcją znanych parametrów:

(A)  $\frac{\lambda V_\Theta^2}{\lambda V_\Theta^2 + (1 + V_\Theta^2)(1 + V_Y^2)}$

(B)  $\frac{\lambda V_\Theta^2}{\lambda V_\Theta^2 + (1 + V_\Theta^2)(1 + V_Y^2) - 1}$

(C)  $\frac{\lambda V_\Theta^2}{\lambda V_\Theta^2 + (1 + V_\Theta^2)(1 + V_Y^2) - V_Y^2}$

(D)  $\frac{\lambda V_\Theta^2}{\lambda V_\Theta^2 + (1 + V_\Theta^2)(1 + V_Y^2) - V_\Theta^2}$

(E)  $\frac{\lambda V_\Theta^2}{\lambda V_\Theta^2 + (1 + V_\Theta^2)(1 + V_Y^2) - V_\Theta^2 V_Y^2}$



**Zadanie 9.**

Modelujemy przebiegający w czasie proces likwidacji szkód przez ubezpieczyciela. Niech  $T$  oznacza zmienną losową oznaczającą czas, jaki upływa od momentu zgłoszenia szkody do jej likwidacji. Niech:

$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{1-F_T(t)}, \quad t > 0,$$

oznacza natężenie procesu likwidacji (gęstość likwidacji tych szkód, które do momentu  $t$  pozostają jeszcze nie zlikwidowane). Występujące we wzorze symbole  $f_T$ ,  $F_T$ , oraz  $h_T$  oznaczają odpowiednio funkcję gęstości, dystrybuantę oraz funkcję hazardu zmiennej  $T$ .

Załóżmy, że natężenie procesu likwidacji dane jest funkcją hazardu określoną na półosi dodatniej następująco:

- $h_T(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ .

Wtedy wartość oczekiwana czasu likwidacji  $E(T)$  wynosi:

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 4
- (D) 8
- (E)  $+\infty$

**Zadanie 10.**

W pewnym ubezpieczeniu szkody zawsze likwidowane są nie później, niż w roku następującym po roku zajścia. Niech  $X_{t,0}$  oraz  $X_{t,1}$  oznaczają łączną wartość szkód zaistniałych w roku  $t$ , a likwidowanych w tym samym roku oraz w roku następnym, odpowiednio. Mamy w dyspozycji próbkę obserwacji z lat  $t = 1, 2, \dots, n$ :

$$\bullet \quad X_{1,0}, X_{1,1}, X_{2,0}, X_{2,1}, \dots, X_{n,0}, X_{n,1}.$$

Zakładamy, że wszystkie powyższe zmienne są niezależne, i mają rozkłady Gamma o parametrach:

$$X_{t,0} \sim \Gamma(\alpha_0, \beta), \quad t = 1, 2, \dots, n,$$

$$X_{t,1} \sim \Gamma(\alpha_1, \beta), \quad t = 1, 2, \dots, n.$$

Nie znamy wartości parametrów  $(\alpha_0, \alpha_1, \beta)$ , w istocie jednak interesuje nas jedynie

parametr  $\mu_1 := \frac{\alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1}$

Rozważamy dwa estymatory tego parametru:

$$\hat{\mu}_1 := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{X_{t,1}}{X_{t,0} + X_{t,1}}, \text{ oraz } \hat{\mu}_1 := \frac{\sum_{t=1}^n X_{t,1}}{\sum_{t=1}^n (X_{t,0} + X_{t,1})}$$

Stosunek wariancji tych estymatorów:

$$\frac{\text{var}(\hat{\mu}_1)}{\text{var}(\hat{\mu}_1)}$$

wynosi:

(A)  $\frac{\alpha_0 + \alpha_1 + 1}{\alpha_0 + \alpha_1 + n}$

(B)  $\frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{n}}{\alpha_0 + \alpha_1 + 1}$

(C)  $\frac{\alpha_0 + \alpha_1 + 1}{\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{n}}$

(D)  $\frac{\alpha_0 + \alpha_1 + n}{\alpha_0 + \alpha_1 + 1}$

(E) 1

**Egzamin dla Aktuariuszy z 1 października 2012 r.****Matematyka ubezpieczeń majątkowych****Arkuszu odpowiedzi\***

Imię i nazwisko ..... KLUCZ ODPOWIEDZI .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja <sup>♦</sup>
1	A	
2	D	
3	E	
4	D	
5	C	
6	A	
7	E	
8	B	
9	C	
10	B	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.