

Zadanie 1.

Mamy dany ciąg liczb $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ z przedziału $(0,1)$. Rozważmy trzy zmienne losowe:

- $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, gdzie X_i ma rozkład dwumianowy o parametrach $(1, q_i)$, i wszystkie składniki są niezależne,
- Y o rozkładzie dwumianowym i parametrach (n, \bar{q}) , gdzie $\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i$
- Z , której warunkowy rozkład (przy danej wartości Q) jest rozkładem dwumianowym z parametrami (n, Q) , zaś zmienna Q ma rozkład n -punktowy taki, że $\Pr(Q = q_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$

Wariancje tych trzech zmiennych porządkują nierówności, które przyjmują postać równości jedynie w przypadku gdy wszystkie q_i są identyczne. Wybierz poprawny porządek.

- (A) $\text{var } X \leq \text{var } Y \leq \text{var } Z$
- (B) $\text{var } X \leq \text{var } Z \leq \text{var } Y$
- (C) $\text{var } Y \leq \text{var } X \leq \text{var } Z$
- (D) $\text{var } Z \leq \text{var } Y \leq \text{var } X$
- (E) $\text{var } Z \leq \text{var } X \leq \text{var } Y$

Zadanie 2.

Rozważamy dwie zmienne losowe o rozkładach złożonych, różniące się założeniami o rozkładzie liczby składników i rozkładzie pojedynczego składnika:

- $PL = Y_1 + \dots + Y_N$, gdzie N ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ , zaś każdy ze składników Y_n ma rozkład logarytmiczny o funkcji prawdopodobieństwa

$$\text{danej wzorem } \Pr(Y_n = k) = \frac{1}{-\ln(1-c)} \cdot \frac{c^k}{k} \text{ dla } k = 1, 2, 3, \dots$$

- $LP = Y_1 + \dots + Y_N$, gdzie N ma rozkład logarytmiczny o funkcji prawdopodobieństwa z parametrem c (jak wyżej), zaś każdy ze składników Y_n ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ .

Rozważamy jedynie dopuszczalne wartości parametrów $\lambda > 0$ oraz $c \in (0, 1)$.

Warunek konieczny i dostateczny, aby przy tych założeniach zachodziła nierówność:

$$\text{var}(LP) > \text{var}(PL)$$

można przedstawić w postaci:

(A) $\lambda > -\ln(1-c) \cdot c$

(B) $\lambda > \frac{-\ln(1-c) \cdot c}{-\ln(1-c) - c}$

(C) $\lambda > \frac{-\ln(1-c) \cdot c}{-\ln(1-c) + c}$

(D) $\lambda > -\ln(1-c)$

(E) $\lambda > \frac{c}{1-c}$

Zadanie 3.

Liczba szkód N ma rozkład o prawdopodobieństwach spełniających zależność rekurencyjną:

$$\frac{\Pr(N = k)}{\Pr(N = k - 1)} = \frac{1}{5} \cdot \left(3 + \frac{12}{k} \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Jeśli wiemy, że $\sum_{k=0}^{\infty} \Pr(N = k) = 1$, to wartość oczekiwana liczby szkód $E(N)$ wynosi:

- (A) $2\frac{2}{3}$
- (B) $4\frac{1}{2}$
- (C) 6
- (D) $7\frac{1}{2}$
- (E) 9

Zadanie 4.

W poniższej tabeli zawarte są wybrane informacje o rozkładzie wartości pojedynczej szkody Y :

y	4	6
$E(\min\{Y, y\})$	3	$3\frac{5}{6}$
$\Pr(Y \leq y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

Z informacji tych wynika, że $E(Y|4 < Y \leq 6)$ wynosi:

(D) $4\frac{2}{3}$

(E) $4\frac{5}{6}$

(F) 5

(D) $5\frac{1}{6}$

(E) $5\frac{1}{3}$

Zadanie 5.

Modelujemy przebiegający w czasie proces ściągania należności regresowych przez ubezpieczyciela. Niech T oznacza zmienną losową o rozkładzie:

- ciągłym na przedziale $(0, +\infty)$
- z pewną, być może dodatnią masą prawdopodobieństwa w punkcie $+\infty$, reprezentującą czas ściągnięcia należności regresowej (liczony od momentu powstania prawa do regresu). Niech f_T , F_T oraz h_T oznaczają odpowiednio funkcję gęstości, dystrybuantę oraz funkcję hazardu zmiennej T . Dystrybuancie oraz funkcji hazardu nadajemy następującą interpretację:

- $F_T(t) = \int_0^t f_T(s) ds$ to wskaźnik ściągальności do czasu t (oczywiście $F_T(0) = 0$)
- $\lim_{t \rightarrow \infty} F_T(t) = \Pr(T < \infty)$ to wskaźnik ściągальności ostatecznej,
- $h_T(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$ dla $t > 0$ to natężenie procesu ściągania (gęstość ściągania należności, które do momentu t pozostają jeszcze nie ściągnięte)

Załóżmy, że natężenie procesu ściągania dane jest funkcją hazardu określoną na półosi dodatniej następująco:

- $h_T(t) = \frac{2}{(2+t)(1+t)}$.

Wtedy wskaźnik ściągальności ostatecznej wynosi:

- (A) 1
- (B) $\frac{4}{5}$
- (C) $\frac{3}{4}$
- (D) $\frac{3}{5}$
- (E) $\frac{1}{2}$

Zadanie 6.

Proces pojawiania się szkód startuje w momencie $T_0 = 0$. Niech T_n oznacza moment zajścia n -tej szkody. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \dots$.

Wypłata odszkodowania za n -tą szkodę następuje w momencie $T_n + D_n$.

Założmy, iż zmienne losowe $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \dots$ oraz D_1, D_2, D_3, \dots

są wszystkie nawzajem niezależne i mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1.

Prawdopodobieństwo, iż dla pewnego ustalonego n wypłata odszkodowania za szkodę $n + 2$ -gą poprzedzi wypłatę odszkodowania za szkodę n -tą wynosi:

(A) $\frac{3}{8}$

(B) $\frac{1}{16}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{3}{16}$

(E) $\frac{1}{8}$

Zadanie 7.

W klasycznym modelu procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t ,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ ,
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ jest sumą wypłat,
- proces $N(t)$ i pojedyncze wypłaty Y_1, Y_2, Y_3, \dots są niezależne.

Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że do ruiny (stanu ujemnej nadwyżki) doszło już przy pierwszej szkodzie.

Niech B będzie zdarzeniem polegającym na tym, że do ruiny w ogóle w skończonym czasie doszło.

Założmy, że:

- wypłaty Y_i mają rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną $\mu = \frac{1}{\ln(12/11)}$,
- parametr intensywności składki c wynosi $c = 120\% \lambda \mu$,
- kapitał początkowy wynosi $u = 2 \frac{2}{5}$

Prawdopodobieństwo warunkowe $\Pr(A|B)$ wynosi:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{11}{24}$

(C) $\frac{5}{12}$

(D) $\frac{11}{21}$

(E) $\frac{12}{22}$

Zadanie 8.

N, Y_1, Y_2, Y_3, \dots to niezależne zmienne losowe, N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 10, zaś Y_1, Y_2, Y_3, \dots mają identyczny rozkład Pareto o dystrybuancie określonej na półosi dodatniej wzorem:

$$\bullet \quad F(y) = 1 - \left(\frac{1}{1+y} \right)^2$$

Niech $M = \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$, przy czym jeśli $N = 0$, to przyjmujemy $M = 0$.

Niech $m_{0,95}$ oznacza taką liczbę, że $\Pr(M \leq m_{0,95}) = 0.95$

Liczba $m_{0,95}$ wynosi (z przybliżeniem do jednej dziesiątej):

- (A) 4.8
- (B) 6.8
- (C) 8.8
- (D) 10.9
- (E) 13.0

Zadanie 9.

Pewien podmiot posiada wyjściowy majątek o wartości w , i narażony jest na stratę X . Strata X jest zmienną losową o złożonym rozkładzie Poissona:

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$$

- z oczekiwaną liczbą szkód równą $E(N) = \lambda$, oraz
- z wartością pojedynczej szkody o rozkładzie wykładniczym i wartości oczekiwanej równej jeden.

Rynek ubezpieczeniowy oferuje kontrakty z pokryciem nadwyżki każdej szkody ponad kwotę d , a więc pokrywa:

$$X_d = (Y_1 - d)_+ + (Y_2 - d)_+ + \dots + (Y_N - d)_+$$

W zamian za składkę w wysokości: $(1 + \theta)E(X_d)$, gdzie parametr θ ma wartość mniejszą od 100%.

Podmiot ten postępuje racjonalnie, a w swoich decyzjach kieruje się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności, przy czym jego funkcja użyteczności jest postaci:

$$u(x) = -\exp\left(-\frac{1}{2}x\right).$$

Maksimum oczekiwanej użyteczności podmiot ten osiągnie wybierając kontrakt z udziałem własnym d w każdej szkodzie równym:

- (A) $2\lambda \ln(1 + \theta)$
- (B) $\ln(1 + \theta)$
- (C) $2\ln(1 + \theta)$
- (D) $\frac{\ln(1 + \theta)}{2}$
- (E) $\frac{\lambda \ln(1 + \theta)}{2}$

Zadanie 10.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t ,
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t ,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości poszczególnych szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ ,
- wartości poszczególnych szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1
- $c = (1 + \theta) \cdot \lambda$, $\theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

$$L := \sup_{t > 0} \{u - U(t)\}$$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym:

$$L = l_1 + l_2 + \dots + l_N, \quad (L = 0 \text{ gdy } N = 0),$$

gdzie składnik l_1 jest zmienną określoną w przypadku, gdy nadwyżka spadnie poniżej u , i równy jest wtedy:

- $l_1 = u - U(t_1)$, gdzie t_1 jest tym momentem czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Warunkowa wartość oczekiwana liczby takich spadków, pod warunkiem że nastąpiła ruina:

$$E(N|L > u)$$

dana jest wzorem:

$$(A) \quad \frac{1 + \theta}{\theta} + \frac{u}{1 + \theta}$$

$$(B) \quad \frac{1}{\theta} + \frac{u\theta}{1 + \theta}$$

$$(C) \quad \frac{1 + \theta}{\theta} + \frac{u\theta}{1 + \theta}$$

$$(D) \quad 1 + \frac{u}{1 + \theta}$$

$$(E) \quad 1 + \frac{u\theta}{1 + \theta}$$

Egzamin dla Aktuariuszy z 12 marca 2012 r.**Matematyka ubezpieczeń majątkowych****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja [♦]
1	A	
2	B	
3	D	
4	E	
5	C	
6	E	
7	B	
8	E	
9	C	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.