Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

XLVI Egzamin dla Aktuariuszy z 2 czerwca 2008 r.

Część III

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas egzaminu: 100 minut

Komisja Nadzoru Finansowego, Warszawa 2.06.2008 r.

Zadanie 1.

W pewnej populacji podmiotów każdy podmiot narażony jest na ryzyko straty X o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną równą μ i wariancją równą 2.

Wszystkie podmioty z tej populacji kierują się w swoich decyzjach maksymalizacją oczekiwanej użyteczności, przy czym ich funkcje użyteczności są postaci:

$$u(x) = -\exp(-ax).$$

Wartość parametru a funkcji użyteczności dla przypadkowo wylosowanego z tej populacji podmiotu dana jest gęstością prawdopodobieństwa:

$$f(a) = 2\exp(-2a).$$

Rynek ubezpieczeniowy oferuje ubezpieczenie od tego ryzyka w zamian za składkę równą P, z założenia wyższą od μ.

Przy tych założeniach odsetek podmiotów, które zdecydują się nabyć ubezpieczenie jest malejącą funkcją składki P o postaci:

$$g(P) = \exp[b \cdot (\mu - P)], \qquad P > \mu$$

Wartość parametru b tej funkcji wynosi:

(A) 1

(B) $\sqrt{2}$

(C) 2

(D) $2\sqrt{2}$

(E) 4

Zadanie 2.

Rozważmy klasyczny model nadwyżki ubezpieczyciela z Poissonowskim procesem pojawiania się szkód o intensywności λ oraz rozkładem wartości pojedynczej szkody Y danym dystrybuantą F_Y.

Załóżmy, że intensywność składki wynosi $(1+\theta)\lambda \mathrm{E}(Y)$, gdzie $\theta > 0$.

Oznaczmy przez X zmienną losową o dystrybuancie danej na półosi dodatniej wzorem:

$$F_X(x) = \frac{\int_0^x (1 - F_Y(y))dy}{\int_0^\infty (1 - F_Y(y))dy}$$

Załóżmy także, że współczynnik dopasowania R istnieje.

Niekiedy (zależy to od własności dystrybuanty F_Y) można łatwo wskazać taką liczbę $g > 1$, że dla każdego dodatniego u prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u) \le \frac{e^{-Ru}}{g}$.

Wybierz tę z odpowiedzi prawidłowych, dla której g jest liczbą możliwie największą:

(A) $g = \inf_{d>0} \left\{ \mathrm{E}\left(e^{R(Y-d)} / Y > d\right) \right\}$

(B) $g = \inf_{d>0} \left\{ \mathrm{E}\left(e^{R(Y-d)} / Y > d\right) \cdot \Pr(Y > d) \right\}$

(C) $g = \inf_{d>0} \left\{ \mathrm{E}\left(e^{R(X-d)} / X > d\right) \cdot \Pr(X > d) \right\}$

(D) $g = \inf_{d>0} \left\{ \mathrm{E}\left(e^{R(X-d)} / X > d\right) \cdot (1+\theta) \right\}$

(E) $g = \inf_{d>0} \left\{ \mathrm{E}\left(e^{R(X-d)} / X > d\right) \right\}$

Zadanie 3.

Pewne ryzyko generuje szkody zgodnie z procesem Poissona z parametrem intensywności λ. O parametrze λ zakładamy, że jest on realizacją zmiennej losowej Λ o rozkładzie Gamma $(2,1)$. Niech $N(t)$ oznacza liczbę szkód w czasie od 0 do t, zaś $T(t)$ - chwilę wystąpienia pierwszej szkody po momencie t.

$E(T(3)-3|N(3)=2)$ wynosi:

(A) 1

(B) $\frac{4}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{2}$

(E) $\frac{2}{3}$

Zadanie 4.

Mamy niepełną informację o rozkładzie nieujemnej zmiennej losowej X w postaci:

x	$F_X(x)$	$\mathrm{E}[(X-x)_+]$
1	0.7	5.5
3	0.9	5

Wobec tego kres górny zbioru możliwych wartości wariancji wewnątrzprzedziałowej w przedziale $(1, 3]$, a więc najmniejsza z takich liczb c, które z pewnością spełniają nierówność:

$$\mathrm{var}\{X|X \in (1, 3]\} < c$$

wynosi:

(A) 1/4

(B) 1/2

(C) 3/4

(D) 1

(E) 5/4

Zadanie 5.

W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym nadwyżka początkowa wynosi 1.5, składka roczna wynosi 1, a łączna wartość szkód w każdym roku z prawdopodobieństwem sześć dziesiątych wynosi 0 i z prawdopodobieństwem cztery dziesiąte wynosi 2 (niezależnie od łącznej wartości szkód w innych latach). Prawdopodobieństwo ruiny wynosi:

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

(C) $\frac{4}{9}$

(D) $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

(E) $\frac{5}{9}$

Zadanie 6.

Rozkład wartości pojedynczej szkody Y dany jest gęstością:

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{160}{(2+x)^6} & dla\, x > 0 \\ 0 & dla\, x \le 0 \end{cases}$$

Niech $X = (1+i)\cdot Y$, $i \ge 0$ (możemy i interpretować jako stopę inflacji).

Niech Z ma rozkład taki, jaki ma nadwyżka szkody Y ponad kwotę $d \ge 0$ pod warunkiem, iż szkoda Y przekroczy kwotę d.

Warunek konieczny i wystarczający, aby rozkłady zmiennych Z oraz X były identyczne brzmi:

(A) $d = i$

(B) $d = 2\cdot i$

(C) $d = (1+i)^2 - 1$

(D) $d = \dfrac{2\cdot i}{1+i}$

(E) $d = 0$ i równocześnie $i = 0$

Zadanie 7.

Łączna wartość szkód $X = Y_1 + \ldots + Y_N$ ma złożony rozkład geometryczny, zaś rozkład wartości pojedynczej szkody określony jest na zbiorze liczb naturalnych, a więc:

$\Pr(Y_1 \in \{1,2,3,\ldots\}) = 1$.

Znamy częściowo rozkład łącznej wartości szkód X:

k	0	1	2	3	4	5
$\Pr(X = k)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{3}{400}$	$\frac{3}{4000}$	$\frac{4503}{40000}$	$\frac{9003}{400000}$

$\Pr(Y_1 = 5)$ wynosi:

(A) 0.00

(B) 0.10

(C) 0.20

(D) podane informacje są sprzeczne

(E) podane informacje są niewystarczające do udzielenia jednoznacznej odpowiedzi

Zadanie 8.

Wiemy, że w populacji ubezpieczających się od pewnego ryzyka zdarzają się oszuści. Załóżmy, że:

- przypadkowo wylosowany z tej populacji osobnik jest oszustem z prawdopodobieństwem 0.04
- oszust z całą pewnością zgłasza co najmniej jedną szkodę w ciągu roku, a czas zgłoszenia pierwszej z nich (liczony od początku roku) dany jest na odcinku $t \in (0,1)$ gęstością prawdopodobieństwa $f(t) = \frac{3}{2} - t$
- proces zgłaszania szkód u uczciwych ubezpieczonych jest procesem Poissona z parametrem intensywności $\lambda = \frac{1}{10}$ rocznie

Prawdopodobieństwo iż ubezpieczony jest oszustem pod warunkiem, że zgłosił (pierwszą) szkodę po trzech miesiącach (w czasie $t = 0.25$) wynosi z dobrym przybliżeniem:

(A) 0.348

(B) 0.342

(C) 0.335

(D) 0.328

(E) 0.322

Zadanie 9.

Rozkład zmiennej losowej X ma dwie ekwiwalentne reprezentacje:

- jako rozkład złożony geometryczny, z liczbą składników N o rozkładzie:

  $$\Pr(N = k) = \frac{2}{3^{k+1}},\ k = 0,1,2,\dots,$$

  oraz wartością pojedynczego składnika o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 2

jako rozkład złożony dwumianowy, gdzie liczba składników N może wynieść tylko zero lub jeden, zaś wartość składnika (o ile $N = 1$) ma rozkład:

(A) wykładniczy o wartości oczekiwanej 2

(B) wykładniczy o wartości oczekiwanej 3

(C) Gamma o parametrach (3,1)

(D) Gamma o parametrach (3,2)

(E) Gamma o parametrach $\left(2, \frac{2}{3}\right)$

Zadanie 10.

Likwidacja szkody zaistniałej w miesiącu t następuje w tym samym miesiącu z prawdopodobieństwem $\frac{2}{22}$, a w miesiącu $t+k$ z prawdopodobieństwem $\frac{5}{22}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$. Wartość każdej szkody wynosi 1. W miesiącach t, $t+1$ i $t+2$ zaistniały odpowiednio 88, 110 i 121 szkód. Wyznacz stan rezerwy szkodowej na koniec miesiąca $t+2$, jeśli na początku miesiąca t stan tej rezerwy wynosił 320.

(A) 325

(B) 353

(C) 365

(D) 380

(E) brakuje danych o tym, z jakich lat pochodzą szkody wchodzące w skład rezerwy na początku t-tego miesiąca

Egzamin dla Aktuariuszy z 2 czerwca 2008 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi *

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja
1	C	
2	E	
3	B	
4	C	
5	C	
6	B	
7	A	
8	A	
9	B	
10	C	