Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXI Egzamin dla Aktuariuszy z 1 października 2012 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Rozważmy model z czasem ciągłym oraz dwoma procesami opisującymi ceny akcji $\{S_j(t)\}_{t\geq 0}$; $j = 1,2$

Każda z akcji płaci dywidendę ze stałą intensywnością proporcjonalną do bieżącej ceny akcji; tj. dla $t \geq 0$ akcja $S_j(t)$ płaci kwotę dywidendy $\delta_j \cdot S_j(t) \cdot dt$ w okresie czasu między t a $(t + dt)$.

Rozważmy zobowiązanie zakładu ubezpieczeń zapadające w chwili $t = 3$ o wypłacie na moment zapadalności postaci $Max\{S_1(3),\ S_2(3)\}$.

Ponadto wiadomo, że:

i. $S_1(0) = PLN\ 100$;

ii. $S_2(0) = PLN\ 200$;

iii. akcja $S_1(t)$ płaci dywidendę w kwocie $0.05 \cdot S_1(t) \cdot dt$ w okresie czasu między t a $(t + dt)$;

iv. akcja $S_2(t)$ płaci dywidendę w kwocie $\delta_2 \cdot S_2(t) \cdot dt$ w okresie czasu między t a $(t + dt)$;

v. dostępna jest europejska opcja wymiany (*exchange option*) dająca możliwość zamiany akcji $S_2(t)$ na akcję $S_1(t)$, zapadająca w chwili $t = 3$; cena tej opcji na chwilę obecną $(t = 0)$ wynosi $PLN\ 10$;

vi. obecna $(t = 0)$ wartość zobowiązania zakładu ubezpieczeń zapadającego w chwili $t = 3$ wynosi $PLN\ 190$.

Jaka jest wartość δ_2? Podaj najbliższą wartość:

A) 0.025
B) 0.030
C) 0.035
D) 0.040
E) 0.045

Wskazówka:

Opcja *wymiany* (*exchange option*) daje jej posiadaczowi, w terminie wygaśnięcia opcji, możliwość (prawo) wymiany jednego instrument podstawowego na drugi.

2. Zakład ubezpieczeń na życie wyznacza kapitałowy wymóg wypłacalności dla ryzyka stopy procentowej (SCR_{INT}) w oparciu o wartość Zmiany Aktywów Netto pod wpływem wahań stopy procentowej według wzoru:

$$SCR_{INT} = max(\Delta NAV_{UP},\ \Delta NAV_{DOWN}, 0)$$

gdzie:

ΔNAV_{UP} - Zmiana Aktywów Netto pod wpływem wzrostu stopy procentowej,

ΔNAV_{DOWN} - Zmiana Aktywów Netto pod wpływem spadku stopy procentowej.

Aktywa Netto są wyznaczane jako nadwyżka aktywów ponad zobowiązania ubezpieczeniowe.

Przyjęto następującą konwencję wyznaczania Zmiany Aktywów Netto: dodatnia wartość oznacza stratę (gdzie strata oznacza spadek wartości Aktywów Netto).

Portfel aktywów zakładu ubezpieczeń składa się z trzech pakietów obligacji wygasających odpowiednio po 4, 8 i 14 latach. Każdy z pakietów ma łączny nominał równy 150 mln PLN i każdy płaci łącznie roczny kupon 8% na koniec każdego roku.

Portfel zobowiązań ubezpieczeniowych zakładu posiada wbudowane opcje i gwarancje, w wyniku czego nominalne przepływy pieniężne zobowiązań zależą od wahań stopy procentowej. Znane są następujące charakterystyki portfela zobowiązań:

- obecna wartość: 300 mln PLN
- efektywny czas trwania (*effective duration*): 6.5
- efektywna wypukłość (*effective convexity*): 5.7

Roczna stopa procentowa jest założona na stałym poziomie 4% (kapitalizacja dyskretna).

Wahania stopy procentowej w górę/dół są założone +/- 1.5 p.p.

Kapitałowy wymóg wypłacalności na ryzyko stopy procentowej wynosi (mln PLN):

A) 23.64

B) 29.06

C) 29.44

D) 31.64

E) 52.69

3. Obecna $(t = 0)$ cena akcji Z wynosi $PLN\ 40$, parametr zmienności ceny akcji $\sigma = 0.23$. Rozpatrujemy model ciągły, w którym wolna od ryzyka stopa procentowa ma stałą roczną intensywność oprocentowania równą 0.07. Ponadto wiadomo, że akcja Z płaci dywidendę ze stałą roczną intensywnością $\delta = 0.03$.
Dostępna jest europejska opcja kupna wystawiona na akcję Z o cenie wykonania $PLN\ 45$ i momencie wygaśnięcia za 6 miesięcy, której obecna $(t = 0)$ cena wynosi 1.091 oraz parametry $N(d_1) = 0.3015$ i $\Gamma = 0.0528$.

Podaj najbliższe oszacowanie ceny opcji kupna wystawionej na akcję Z wiedząc, że cena akcji Z wzrosła w bardzo krótkim okresie czasu do wartości $PLN\ 41$.

A) 1.362
B) 1.388
C) 1.397
D) 1.414
E) 1.423

Wskazówka:

$d_1 = \frac{\ln\frac{S_t}{X} + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, gdzie S_t- cena akcji w chwili t ; X-cena wykonania; σ- zmienność ceny akcji; r-stopa wolna od ryzyka; T- moment wykonania opcji.

$N(\cdot)$ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

4. Rozważmy obligację korporacyjną wyemitowaną na początku roku przez spółkę o ratingu kredytowym A. Jest to trzyletnia obligacja o nominale 1 000, z kuponem w wysokości 4% wartości nominalnej, płatnym na koniec roku.

Do wyceny obligacji korporacyjnych wykorzystujemy model oparty o rating kredytowy emitenta i posiadający następujące założenia:

- Możliwe są trzy ratingi kredytowe A, B lub C.
- Macierz prawdopodobieństw przejścia pomiędzy ratingami w jednym kroku ma następującą postać:

$$\begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} & p_{AC} \\ p_{BA} & p_{BB} & p_{BC} \\ p_{CA} & p_{CB} & p_{CC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

- Krok modelu jest roczny.
- Jeśli na początku roku k emitent obligacji posiada rating kredytowy A, B lub C, to do dyskontowania przepływów pieniężnych z wyemitowanej przez niego obligacji przypadających na dany rok używamy odpowiednio czynnika dyskontującego $\mathrm{v_A}, \mathrm{v_B}$ lub $\mathrm{v_C}$. Czynniki te wynoszą: $\mathrm{v_A} = 0.95, \mathrm{v_B} = 0.90, \mathrm{v_C} = 0.85$.

Przy powyższych założeniach, cena obligacji w momencie emisji wynosi w przybliżeniu:

A) 701.59
B) 756.00
C) 920.48
D) 965.77
E) 1000.00

5. Funkcja intensywności oprocentowania rachunku w chwili t, dla kwoty zainwestowanej w chwili s $0 \leq s \leq t$ wynosi: $\delta(s,t) = (1+s+2t)^{-1}$. Rozważmy dwie strategie inwestycyjne w horyzoncie czasu $[0,2]$:

1) Kwotę $K(0)$ inwestujemy w chwili 0 i utrzymujemy do chwili 2.
2) Kwotę $K(0)$ inwestujemy w chwili 0, w chwili 1 wypłacamy zakumulowaną wartość tej kwoty i natychmiast reinwestujemy na tym samym rachunku (zgodnie z podaną intensywnością oprocentowania).

Niech $K_1(2), K_2(2)$ oznaczają zakumulowane na rachunku na koniec inwestycji kwoty dla strategii 1) i 2) odpowiednio. Stosunek tych kwot, tzn. $K_1(2)/K_2(2)$ wynosi w przybliżeniu:

A) 0.5
B) 0.75
C) 0.9
D) 1
E) 1.05

6. Cena jednej akcji spółki α wynosi 50. Inwestor zakłada, że cena akcji tej spółki za rok ma rozkład jednostajny na przedziale $(20, 100)$. Inwestor konstruuje dwa portfele:

1) Zawierający w 100% akcje spółki α.
2) Zawierający w 100% długie pozycje w europejskich opcjach call na akcje spółki α z ceną wykonania 50 i rocznym terminem wykonania.

Cena opcji wynosi 10.

Przy powyższych założeniach, obliczyć stosunek wariancji rocznej stopy zwrotu z portfela 2, do wariancji rocznej stopy zwrotu z portfela 1. Podać najbliższą wartość:

A) 11.55
B) 12.97
C) 13.06
D) 13.51
E) 13.94

7. Rozważmy dwie renty A i B, o następujących charakterystykach:

renta A

- renta o płatnościach dokonywanych na końcu każdego roku przez okres 20 lat,
- pierwsza płatność wynosi 5 000, a każda kolejna płatność jest mniejsza od płatności poprzedniej o Q,
- jeżeli zmodyfikujemy rentę A w ten sposób, że pierwsza płatność wynosi 5 000, a każda kolejna płatność jest większa od płatności poprzedniej o Q, to stosunek wartości obecnej renty A do wartości obecnej zmodyfikowanej renty A wyniesie 0.727027

renta B

- renta ciągła o okresie wypłat 20 lat,
- intensywność wypłat w chwili t wynosi $f(t) = C \cdot t^2$,
- wartość obecna renty B jest taka sama jak renty A.

W przypadku obu rent intensywność oprocentowania jest stała i wynosi 0.04879.

Obliczyć, ile wynosiłaby obecna wartość renty B, gdyby zmodyfikować jej intensywność wypłat w sposób następujący: $f_1(t) = t^2 + C \cdot t$

Podaj najbliższą wartość.

A) 5 612

B) 5 622

C) 5 632

D) 5 642

E) 5 652

8. Analiza danych dotyczących portfela grupowych ubezpieczeń na życie w okresie 20 kolejnych lat wykazała, że w tym okresie:

- w pierwszym roku była wpłacona składka o wartości P, natomiast w każdym następnym roku składka rosła o 1%,
- wyniki techniczne uzyskiwane przez zakład ubezpieczeń w tym portfelu wynosiły:
  $0.9 \cdot (P - 1\,500)$ w pierwszym roku powyższego okresu,
  $0.03 \cdot [P \cdot (n-1) - 200]$ dla roku n, w latach 2, 3, …, 10
  $0.02 \cdot [P \cdot (n-1) - 100]$ dla roku n, w latach 11, 12, …, 20
- marża zakładu ubezpieczeń ze sprzedaży ubezpieczeń w ramach przedmiotowego portfela rozumiana jako stosunek sumy zdyskontowanych na początek okresu wyników technicznych do sumy zdyskontowanych składek wyniosła 7%,
- składka była opłacana na początku każdego roku, a wyniki techniczne za dany rok ustalano na końcu tego roku.

Oblicz wartość P, przy założeniu, że w całym powyższym okresie stopa oprocentowania była stała i wynosiła 5%.
Podaj najbliższą wartość.

A) 601
B) 621
C) 641
D) 661
E) 681

9. Kredyt jest wypłacany przez bank w 3 transzach, płatnych na początku roku w odstępach rocznych. Wysokość pierwszej transzy wynosi 200 000, a stosunek wartości każdej kolejnej transzy do poprzedniej jest stały i wynosi S.

Każda transza kredytu spłacana jest począwszy od momentu jej otrzymania, w postaci 10 letniej renty o równych płatnościach dokonywanych na końcu kolejnych lat.

Wyznacz wartość S, jeżeli wiadomo, że sumaryczna kwota odsetek zapłaconych w ratach płatnych na końcu 7, 8, 9 i 10 roku (lata są liczone od momentu wypłaty pierwszej transzy kredytu) wynosi 49 700, a stopa procentowa jest równa 8%.

Podaj najbliższą wartość.

A) 0.45
B) 0.50
C) 0.55
D) 0.60
E) 0.65

10. Renta wieczysta wypłaca raty na końcu każdego parzystego roku. Wielkość raty wypłacanej na końcu roku 2n, gdzie n = 1, 2, …, wynosi:

$$\frac{n \cdot (2n+1)}{6^n}$$

Wskaż wzór wyrażający skapitalizowaną wartość tej renty na początku pierwszego roku, jeżeli czynnik dyskontowy jest równy *v*.

A) $\frac{36v^4+108v^2}{216+18v^4-108v^2-v^6}$

B) $\frac{36v^4+6v^2}{216+18v^4+108v^2+v^6}$

C) $\frac{6v^4+36v^2}{216+18v^4-108v^2-v^6}$

D) $\frac{36v^4+108v^2}{216+18v^4+108v^2+v^6}$

E) $\frac{6v^4+108v^2}{216+18v^4-108v^2-v^6}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 1 października 2012 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	A	
3	D	
4	C	
5	E	
6	B	
7	A	
8	B	
9	D	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.