Zadanie 1.

Zakładamy, że $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$, $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{15}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, przy czym $EX_i = \mu_1$ i $VarX_i = \sigma^2$ dla $i = 1,2,\ldots,10$, oraz $EX_i = \mu_2$ i $VarX_i = 3\sigma^2$ dla $i = 11,12,\ldots,15$. Parametry μ_1, μ_2 i σ są nieznane.

Niech $\overline{X}_1 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$, $\overline{X}_2 = \frac{1}{5}\sum_{i=11}^{15} X_i$, $\overline{X} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} X_i$.

Dobrać stałe a i b tak, aby statystyka

$$\hat{\sigma}^2 = a\sum_{i=1}^{15}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 + b\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)^2$$

była estymatorem nieobciążonym parametru σ^2.

(A) $a = \frac{1}{21}$, $b = -\frac{10}{63}$

(B) $a = \frac{1}{25}$, $b = \frac{2}{15}$

(C) $a = \frac{1}{13}$, $b = -\frac{5}{117}$

(D) $a = \frac{1}{21}$, $b = -\frac{5}{189}$

(E) $a = \frac{1}{25}$, $b = -\frac{1}{45}$

Zadanie 2.

Zakładamy, że zależność czynnika Y od czynnika x (nielosowego) opisuje model regresji liniowej $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$. Obserwujemy 10 elementową próbkę, w której $x_1 = x_2 = \ldots = x_5 = 1$ i $x_6 = x_7 = \ldots = x_{10} = 4$. Zmienne losowe $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10}$ są niezależne i błędy mają rozkłady normalne o wartości oczekiwanej 0, przy czym $Var\varepsilon_i = 1$, gdy $i = 1,2,\ldots,5$, i $Var\varepsilon_i = 9$, gdy $i = 6,7,\ldots,10$. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \beta_0 = 0$ przy alternatywie $H_1 : \beta_0 \neq 0$ testem na poziomie istotności 0,05 o obszarze krytycznym postaci

$$K = \left\{ \left| \hat{\beta}_0 - \beta_0 \right| > c \right\},$$

gdzie $\hat{\beta}_0$ jest estymatorem parametru β_0 otrzymanym wykorzystując ważoną metodę najmniejszych kwadratów, to znaczy minimalizując po β_0 i β_1 sumę

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{(Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{Var\varepsilon_i}.$$

Stała c jest równa

(A) c=0,55

(B) c=0,65

(C) c=1,09

(D) c=1,46

(E) c=2,63

Zadanie 3.

Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{gdy } x \geq 1 \text{ i } y \in [1;2] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech $S = X + Y$ i $V = X - Y$. Wtedy $P(V < 1 \mid S = 4)$ jest równe

(A) $\frac{9}{25}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{81}{125}$

(D) $\frac{44}{125}$

(E) $\frac{19}{25}$

Zadanie 4.

Dysponujemy 5 identycznymi urnami. Każda z nich zawiera 4 kule. Liczba kul białych w $i-$tej urnie jest równa $i-1$, gdzie $i=1,2,...,5$, pozostałe kule są czarne. Losujemy urnę, a następnie ciągniemy z niej jedną kulę i okazuje się, że otrzymana kula jest biała. Oblicz prawdopodobieństwo, że ciągnąc drugą kulę z tej samej urny (bez zwracania pierwszej) również otrzymamy kulę białą.

(A) $\frac{3}{10}$

(B) $\frac{2}{5}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) $\frac{1}{2}$

Zadanie 5.

Obserwujemy niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5$. Zmienne losowe X_1, X_2, X_3, X_4 mają ten sam rozkład o dystrybuancie F_{μ_1}, a zmienne losowe Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 mają ten sam rozkład o dystrybuancie F_{μ_2}. Dystrybuanta F_μ spełnia warunek

$$F_\mu(x) = F(x - \mu)$$

dla pewnej ustalonej, nieznanej, ciągłej, ściśle rosnącej dystrybuanty F. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ przy alternatywie $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ stosując test o obszarze krytycznym

$$K = \{S : S < 16\},$$

gdzie S jest sumą rang zmiennych losowych X_1, X_2, X_3, X_4 w próbce złożonej ze wszystkich obserwacji ustawionych w ciąg rosnący. Wyznaczyć rozmiar testu.

(A) $\frac{18}{126}$

(B) $\frac{17}{126}$

(C) $\frac{16}{126}$

(D) $\frac{19}{126}$

(E) $\frac{15}{126}$

Zadanie 6.

Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale [0; 1], zaś N jest zmienną losową o rozkładzie geometrycznym,

$$P(N = k) = p(1-p)^k \quad \text{gdy} \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

niezależną od zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$. Liczba $p \in (0,1)$ jest ustalona. Niech

$$Y_N = \begin{cases} \min\{X_1, X_2, \ldots, X_N\} & \text{gdy} \quad N > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad N = 0, \end{cases}$$

$$Z_N = \begin{cases} \max\{X_1, X_2, \ldots, X_N\} & \text{gdy} \quad N > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad N = 0. \end{cases}$$

Obliczyć $P\left(Z_N - Y_N > \frac{1}{2}\right)$.

(A) $1 - \dfrac{2p(1-p)}{1+p}$

(B) $1 - \dfrac{4p}{(1+p)^2}$

(C) $1 - \dfrac{2p}{1+p}$

(D) $1 - \dfrac{2p}{(1+p)^2}$

(E) $1 - \dfrac{4p^2}{(1+p)^2}$

Zadanie 7.

Załóżmy, że $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 1, zaś N jest zmienną losową o rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej 3, niezależną od zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$. Niech

$$S_N = \begin{cases} X_1 + X_2 + \ldots + X_N & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0. \end{cases}$$

Współczynnik spłaszczenia $\kappa = \frac{E(S_N - ES_N)^4}{(VarS_N)^2} - 3$ zmiennej S_N jest równy

(A) -1

(B) $\frac{2}{3}$

(C) 4

(D) 2

(E) 1

Zadanie 8.

Cyfry 1, 2, 3, …, 9 ustawiamy losowo na miejscach o numerach 1, 2, 3, …, 9. Niech X będzie zmienną losową równą liczbie cyfr stojących na miejscach o numerach równych cyfrom. Wariancja zmiennej X jest równa

(A) $\frac{16}{18}$

(B) 1

(C) $\frac{17}{18}$

(D) $\frac{20}{18}$

(E) $\frac{9}{18}$

Zadanie 9.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą zmiennymi losowymi o rozkładzie $\text{Pareto}(1, a_1)$ a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ będą zmiennymi losowymi o rozkładzie $\text{Pareto}(1, a_2)$, gdzie $a_1, a_2 > 0$ są nieznanymi parametrami. Wszystkie zmienne są niezależne. Na poziomie ufności $1-\alpha$ budujemy przedział ufności $[dT, cT]$ dla parametru $\frac{a_1}{a_2}$ na podstawie estymatora największej wiarogodności T tegoż parametru w ten sposób, że

$$P_{a_1,a_2}(cT < \frac{a_1}{a_2}) = P_{a_1,a_2}(dT > \frac{a_1}{a_2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Jeśli $\alpha = 0{,}1$ i m=4 i n=5, to przedział ufności ma długość

(A) 4,42T

(B) 2,77T

(C) 6,06T

(D) 5,03T

(E) 3,02T

Uwaga: Rozkład $\text{Pareto}(\lambda, \theta)$ jest rozkładem o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\theta \theta}{(\lambda + x)^{\theta+1}} & \text{gdy} \quad x > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad x \le 0 \end{cases}$$

Zadanie 10.

Niech X_1, X_2, X_3, X_4 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie geometrycznym postaci

$$P(X = k) = p(1-p)^k \quad \text{gdy} \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

gdzie $p \in (0,1)$ jest nieznanym parametrem. Hipotezę $H_0:\ p = \frac{1}{2}$ przy alternatywie $H_1:\ p > \frac{1}{2}$ weryfikujemy testem jednostajnie najmocniejszym na poziomie istotności 0,1875. Moc tego testu przy alternatywie $p = \frac{4}{5}$ jest równa

(A) 0,66667

(B) 0,49152

(C) 0,50000

(D) 0,99840

(E) 0,73728

Egzamin dla Aktuariuszy z 4 kwietnia 2011 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I...............................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	D	
3	C	
4	D	
5	A	
6	B	
7	D	
8	B	
9	E	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.