

Zadanie 1.

Przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ liczby szkód generowane przez ubezpieczającego się w kolejnych latach to niezależne zmienne losowe o rozkładzie Poissona z parametrem λ . Rozkład parametru ryzyka Λ w populacji ubezpieczających się (zakładamy dla uproszczenia, że jest to populacja nieskończona) jest rozkładem Gamma(2, 10), o wartości oczekiwanej równej 2/10.

W roku 1 mieliśmy w portfelu 1000 osób wylosowanych z tej populacji. W roku 2 w naszym portfelu znajduje się ponownie 1000 osób, przy czym 750 osób to losowo dobrana podgrupa z grupy osób ubezpieczonych w roku 1, zaś 250 osób to nowi ubezpieczeni, dołosowani z populacji. Niech N_1 i N_2 oznacza liczbę szkód z naszego portfela w roku 1 i w roku 2, odpowiednio. Wobec tego $E[(N_1 - N_2)^2]$ wynosi:

- (A) 400
- (B) 410
- (C) 420
- (D) 430
- (E) 440

Zadanie 2.

W poniższej tabeli zawarte są wybrane informacje o rozkładzie wartości pojedynczej szkody Y :

y	2	4
$E[(Y - y)_+]$	$6\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{8}$
$\Pr(Y \leq y)$	$1/4$	$1/2$

Z informacji tych wynika, że $E(Y|2 < Y \leq 4)$ wynosi:

- (A) $2\frac{1}{2}$
- (B) $2\frac{2}{3}$
- (C) 3
- (D) $3\frac{1}{3}$
- (E) $3\frac{1}{2}$

Zadanie 3.

Niech X_1, X_2, X_3, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach dwupunktowych postaci:

$$\Pr(X_k = 0) = \frac{k-1}{k}, \quad \Pr(X_k = k) = \frac{1}{k},$$

i niech $W_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ będzie ich sumą częściową.

Granica ciągu współczynników skośności:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E\{(W_n - E(W_n))^3\}}{[\text{var}(W_n)]^{\frac{3}{2}}}$$

wynosi:

(A) 0

(B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(D) $\frac{8}{5}$

(E) ∞

Zadanie 4.

Łączna wartość szkód:

- $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$, ($X = 0$ gdy $N = 0$)

ma przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ warunkowy rozkład złożony Poissona o oczekiwanej licznie szkód równej λ oraz rozkładzie wartości pojedynczej szkody danym dla $x \geq 0$ dystrybuantą:

- $F_{Y|\Lambda=\lambda}(x) = 1 - \exp(-a \cdot \exp(b\lambda) \cdot x)$

Parametr ryzyka Λ ma w populacji ubezpieczonych rozkład Gamma(α, β), o gęstości:

- $f_{\Lambda}(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)$.

Przyjmijmy wartości parametrów zadania równe:

- $a = \frac{1}{10}$, $b = 1$
- $\alpha = 2$, $\beta = 10$

Wobec tego iloraz:

- $\frac{E(X)}{E(N) \cdot E(Y)}$

wynosi:

(A) 1

(B) $\frac{11}{12}$

(C) $\frac{10}{11}$

(D) $\frac{5}{6}$

(E) $\frac{9}{11}$

Zadanie 5.

Wiadomo, że zmienne losowe N_1, N_2, N_3 są niezależne, i mają rozkłady określone na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych, spełniające zależności rekurencyjne:

$$\Pr(N_1 = k) = \frac{1}{2} \cdot \Pr(N_1 = k - 1), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Pr(N_2 = k) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \right) \cdot \Pr(N_2 = k - 1), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Pr(N_3 = k) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k} \right) \cdot \Pr(N_3 = k - 1), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Wobec tego $\Pr(N_1 + N_2 + N_3 = 4)$ wynosi:

(A) $\frac{126}{1024}$

(B) $\frac{112}{1024}$

(C) $\frac{210}{1024}$

(D) $\frac{224}{1024}$

(E) $\frac{252}{1024}$

Zadanie 6.

Każdej jednostce z pewnej populacji przydarzają się szkody zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ (rocznie), pod warunkiem że parametr ryzyka Λ charakteryzujący tę jednostkę wynosi λ . Znamy pierwsze trzy momenty rozkładu zmiennej Λ w tej populacji:

$$E\Lambda = 0.2, \quad E(\Lambda^2) = 0.1, \quad E(\Lambda^3) = 0.08.$$

Niech N oznacza liczbę szkód wygenerowaną przez (losowo wybraną z tej populacji) jednostkę w ciągu dwóch kolejnych lat. Moment centralny trzeciego rzędu zmiennej N wynosi:

- (A) 0.416
- (B) 0.832
- (C) 1.124
- (D) 1.408
- (E) 1.664

Zadanie 7.

Rozważamy zdyskontowany proces nadwyżki ubezpieczyciela postaci:

$$U(t) = u + c \cdot \int_0^t \exp(-\delta t) dt - \sum_{k=1}^{N(t)} \exp(-\delta T_k) Y_k, \quad t \geq 0, \quad \text{gdzie:}$$

- $u \geq 0$ - to nadwyżka początkowa
- c - to intensywność napływu składki na jednostkę czasu
- Y_1, Y_2, Y_3, \dots - to wartości kolejnych szkód
- $(N(t) = n) \Leftrightarrow (T_n \leq t < T_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, gdzie:
 - $T_0 = 0$, zaś T_1, T_2, T_3, \dots to momenty zajścia kolejnych szkód.

O wartościach szkód i momentach ich zajścia przyjmujemy założenia:

- Y_1, Y_2, Y_3, \dots są dodatnie i mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1
- $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), (T_4 - T_3), \dots$ są dodatnie i mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1/5
- $Y_1, T_1, Y_2, (T_2 - T_1), Y_3, (T_3 - T_2), Y_4, (T_4 - T_3), \dots$ są niezależne.

Zakładamy ponadto, że $c = 5\frac{3}{4}$ oraz że $\delta = 1/20$.

Jeśli rozkład zmiennej losowej $\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\delta T_k) Y_k$ przybliżymy rozkładem normalnym,

to wartość $u_{0,95}$ kapitału początkowego u taka, przy której zachodzi:

- $\Pr(U(\infty) > 0) = 95\%$

z dokładnością tego przybliżenia wyniesie:

- (A) $u_{0,95} \approx 1.15$
- (B) $u_{0,95} \approx 1.25$
- (C) $u_{0,95} \approx 1.35$
- (D) $u_{0,95} \approx 1.45$
- (E) $u_{0,95} \approx 1.55$

Uwaga: Zmienna normalna standaryzowana przekracza z prawdopodobieństwem 5% wartość 1,645

Zadanie 8.

Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela postaci:

$$U(t) = u + c \cdot t - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \quad t \geq 0, \quad \text{gdzie:}$$

- $u \geq 0$ - to nadwyżka początkowa
- c - to intensywność napływu składki na jednostkę czasu
- Y_1, Y_2, Y_3, \dots - to wartości kolejnych szkód
- $(N(t) = n) \Leftrightarrow (T_n \leq t < T_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, gdzie:
 - $T_0 = 0$, zaś T_1, T_2, T_3, \dots to momenty zajścia kolejnych szkód.

O wartościach szkód i momentach ich zajścia przyjmujemy założenia:

- Y_1, Y_2, Y_3, \dots są dodatnie i mają ten sam rozkład,
- $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), (T_4 - T_3), \dots$ są dodatnie i mają ten sam rozkład,
- $Y_1, T_1, Y_2, (T_2 - T_1), Y_3, (T_3 - T_2), Y_4, (T_4 - T_3), \dots$ są niezależne.

Zakładamy także, iż istnieje współczynnik dopasowania R , a więc taka liczba dodatnia r , która spełnia równanie: $E[\exp(-rU_{n+1}|U_n)] = \exp(-rU_n)$.

Rozważamy dwa warianty procesu:

- Wariant 1, gdzie T_1 ma rozkład Gamma($1, \lambda$) zaś Y_1 rozkład Gamma($1, \beta$);
- Wariant 2, gdzie T_1 ma rozkład Gamma($\frac{1}{2}, \lambda$) zaś Y_1 rozkład Gamma($\frac{1}{2}, \beta$)

Niech R_1 i $\Psi_1(u)$ oraz R_2 i $\Psi_2(u)$ oznaczają współczynnik dopasowania i funkcję prawdopodobieństwa ruiny dla wariantu 1 oraz wariantu 2, odpowiednio. Spośród poniższych zdań wybierz zdanie prawdziwe:

(A) $R_1 < R_2$ oraz $\forall_{u \geq 0} (\Psi_1(u) > \Psi_2(u))$

(B) $R_1 > R_2$ oraz $\forall_{u \geq 0} (\Psi_1(u) < \Psi_2(u))$

(C) $R_1 = R_2$ oraz $\forall_{u \geq 0} (\Psi_1(u) > \Psi_2(u))$

(D) $R_1 = R_2$ oraz $\forall_{u \geq 0} (\Psi_1(u) < \Psi_2(u))$

(E) $R_1 = R_2$ oraz $\exists_{u \geq 0} (\Psi_1(u) = \Psi_2(u))$

Zadanie 9.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela:

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$$

gdzie:

- u – to nadwyżka początkowa,
- $S(t)$ - to łączna wartość szkód, będąca złożonym procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ , z wykładniczymi szkodami o wartości oczekiwanej $1/\beta$
- Parametr intensywności składki wynosi $c = \frac{6\lambda}{5\beta}$

Wiemy, że przy aktualnej wysokości kapitału początkowego u spełniony jest warunek:

- $\Psi(u) = 1/10$.

Udziałowcy postanowili zwiększyć nadwyżkę początkową dwukrotnie. Po tej zmianie prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(2u)$ wyniesie:

- (A) 0.010
- (B) 0.012
- (C) 0.0144
- (D) $\frac{1}{144}$
- (E) za mało danych do udzielenia odpowiedzi liczbowej

Zadanie 10.

Proces pojawiania się szkód startuje w momencie $T_0 = 0$. Niech T_n oznacza moment zajścia n -tej szkody. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \dots$.

Wypłata odszkodowania za n -tą szkodę następuje w momencie $T_n + D_n$. Załóżmy, iż

zmiennie losowe: $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \dots$

oraz: D_1, D_2, D_3, \dots

są wszystkie nawzajem niezależne i mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1.

Prawdopodobieństwo, iż dla pewnego ustalonego n wypłata odszkodowania za szkodę $n + 1$ -szą poprzedzi wypłatę odszkodowania za szkodę n -tą wynosi:

(A) 0

(B) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{1}{4}$

(E) $\frac{1}{3}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 4 kwietnia 2011 r.**Matematyka ubezpieczeń majątkowych****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko KLUCZ ODOWIEDZI.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	E	
3	B	
4	C	
5	A	
6	D	
7	D	
8	D	
9	B	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.