

Zadanie 1

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych, przy czym $EX = 4$ i $EY = 6$. Rozważamy zmienną losową $Z = \frac{Y}{X + Y}$.

Wtedy

- (A) $EZ = 0,6$
- (B) mediana rozkładu zmiennej losowej Z jest równa $0,6$
- (C) mediana rozkładu zmiennej losowej Z jest równa $0,4$
- (D) $EZ = 0,4$
- (E) mediana rozkładu zmiennej losowej Z jest równa $0,5$

Zadanie 2

Bolek i Lolek dostaną próbkę prostą X_1, \dots, X_{10} z rozkładu normalnego (μ, σ^2) . Obaj nie znają wartości oczekiwanej μ , ale Bolek zna wariancję σ^2 , a Lolek jej nie zna. Obaj budują w standardowy sposób przedziały ufności dla μ na poziomie ufności 0.95.

Lolek się chwali: „mam szansę 10%, że mój przedział ufności będzie przynajmniej x razy krótszy, niż Twój”.

Znajdź x .

- (A) $x \approx 2.27$
- (B) $x \approx 2$
- (C) $x \approx 1.47$
- (D) $x \approx 1.27$
- (E) $x \approx 1.05$

Zadanie 3

Wylosowano niezależnie 15 liczb z rozkładu symetrycznego ciągłego i ustawiono je w ciąg według kolejności losowania. Otrzymano 8 liczb dodatnich (każdą z nich oznaczmy symbolem a) i 7 ujemnych (każdą z nich oznaczmy symbolem b). Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymano 6 serii, gdzie serią nazywamy ciąg elementów jednego typu, przed i za którym występuje element drugiego typu, na przykład w ciągu: $aaabbbbaabbbba$ jest 5 serii (3 serie elementów typu a i 2 serie elementów typu b).

(A) $\frac{28}{143}$

(B) $\frac{7}{143}$

(C) $\frac{14}{143}$

(D) $\frac{56}{429}$

(E) $\frac{112}{429}$

Zadanie 4

Założmy, że zmienne losowe X, Y mają łączny rozkład normalny taki, że

$$EX = 1, EY = 0, \text{Var}(X) = 2, \text{Var}(Y) = 9 \text{ i } \text{Cov}(X, Y) = 3.$$

Oblicz $\text{Cov}(X^2, Y^2)$.

- (A) -9
- (B) 10
- (C) -18
- (D) 18
- (E) 9

Zadanie 5

Niech X będzie pojedynczą obserwacją z rozkładu o gęstości

$$p_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}(\theta - 2|x|) & \text{gdy } x \in \left[-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right] \\ 0 & \text{gdy } x \notin \left[-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right], \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \theta = 1$ przy alternatywie $H_1 : \theta \neq 1$ za pomocą testu opartego na ilorazie wiarygodności na poziomie istotności 0.2. Moc tego testu przy alternatywie $\theta = 6$ jest równa

- (A) 0.82
- (B) 0.76
- (C) 0.36
- (D) 0.92
- (E) 0.66

Zadanie 6

Niech N oraz X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną $\lambda = 1$, zaś rozkład każdej ze zmiennych X_n podaje następująca tabelka:

x	1	2	3
$\Pr(X_n = x)$	1/2	1/4	1/4

Niech $S = \sum_{i=1}^N X_i$ dla $N > 0$ i $S = 0$ dla $N = 0$.

Oblicz warunkową wartość oczekiwaną $E(N | S = 3)$.

- (A) $\frac{27}{19}$
- (B) $\frac{21}{19}$
- (C) $\frac{29}{19}$
- (D) $\frac{25}{19}$
- (E) $\frac{31}{19}$

Zadanie 7

Zmienna losowa N ma rozkład geometryczny

$$P(N = n) = p^n(1 - p) \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie $p \in (0, 1)$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy losową liczbę zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_N , przy czym zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_N są niezależne wzajemnie i niezależne od zmiennej losowej N . Każda ze zmiennych X_i ma rozkład jednostajny o gęstości danej wzorem:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 1/\theta & \text{dla } 0 \leq x \leq \theta; \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.

Obserwujemy tylko te spośród zmiennych X_1, X_2, \dots, X_N , które są większe od 5. Nie wiemy ile jest pozostałych zmiennych ani jakie są ich wartości. Przypuśćmy, że zaobserwowaliśmy następujące wartości

$$8.5 \quad 10, \quad 6, \quad 7.4, \quad 9, \quad 5.2.$$

Na podstawie tych danych wyznacz wartości estymatorów największej wiarygodności parametrów θ i p .

(A) $\hat{\theta} = 10$ i $\hat{p} = \frac{11}{12}$

(B) $\hat{\theta} = 12$ i $\hat{p} = \frac{6}{7}$

(C) $\hat{\theta} = 10$ i $\hat{p} = \frac{12}{13}$

(D) $\hat{\theta} = 10$ i $\hat{p} = \frac{6}{7}$

(E) $\hat{\theta} = 12$ i $\hat{p} = \frac{12}{13}$

Zadanie 8

Niech X_1, X_2, \dots, X_5 będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Dla parametru θ zakładamy rozkład a priori o gęstości

$$\pi(\theta) = \begin{cases} 3\theta^{-4} & \text{gdy } \theta > 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Estymujemy parametr θ^2 przy funkcji straty postaci

$$L(\theta, a) = |\theta^2 - a|.$$

Wyznacz estymator bayesowski a parametru θ^2 , jeżeli zaobserwowano próbkę 0.25, 0.50, 1, 1.3, 2.

- (A) 8
- (B) $4\sqrt[4]{2}$
- (C) $4\sqrt[8]{2}$
- (D) $4\sqrt{2}$
- (E) $4 + \sqrt[4]{2}$

Zadanie 9

Niech X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$p_{\theta, \lambda}(x) = \begin{cases} \frac{\theta \lambda^\theta}{(\lambda + x)^{\theta+1}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$

gdzie $\lambda, \theta > 0$ są nieznanymi parametrami. Niech $\hat{\theta}_n, \hat{\lambda}_n$ będą estymatorami tych parametrów otrzymanymi metodą największej wiarygodności w oparciu o próbę n elementową.

Przypuśćmy, że $\theta = 4$ i $\lambda = 1$. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\hat{\lambda}_n - 1\right| \sqrt{n} > 2\right)$$

jest równa

- (A) 0.046
- (B) 0.183
- (C) 0.103
- (D) 0.453
- (E) 0.741

Zadanie 10

Niech X oznacza zmienną losową równą liczbie sukcesów w n ($n \geq 2$) niezależnych próbach Bernoulliego. Prawdopodobieństwo sukcesu θ ($\theta \in (0,1)$) jest nieznane.

Rozważamy estymator parametru θ postaci $\hat{\theta} = aX + b$, o wartościach nieujemnych, którego błąd średniokwadratowy jest stały niezależny od wartości parametru θ .

Błąd średniokwadratowy tego estymatora jest równy

(A) $\frac{1}{4n}$

(B) $\frac{1}{2(\sqrt{n} - 1)^2}$

(C) $\frac{1}{4(\sqrt{n} - 1)^2}$

(D) $\frac{1}{4(\sqrt{n} + 1)^2}$

(E) $\frac{1}{2(\sqrt{n} + 1)^2}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 13 grudnia 2010 r.**Prawdopodobieństwo i Statystyka****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko : KLUCZ ODPOWIEDZI.....
PeSEL

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	D	
3	C	
4	D	
5	B	
6	A	
7	C	
8	B	
9	E	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.