Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LV Egzamin dla Aktuariuszy z 13 grudnia 2010 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Pan Jan przystępuje do Funduszu Inwestycyjnego z kwotą początkową S_0. Fundusz działa w następujący sposób: każdego dnia $n = 1,2,...,$ do kwoty początkowej może być dodana kwota $X_n = A$ PLN z prawdopodobieństwem $p \in [0,1]$ lub odjęta kwota $X_n = B$ PLN z prawdopodobieństwem $q \in [0,1]$, $A, B > 0$. Każdego dnia ma miejsce albo powiększenie albo pomniejszenie funduszu i zdarzenia te są niezależne. Załóżmy, że Pan Jan każdego dnia ma informację o tym, czy kwota X_n została dodana czy odjęta. Zdefiniujmy proces $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ stanu funduszu Pana Jana na dzień n, jako $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$ i rozważmy następujące stwierdzenia.

(i) Proces $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(ii) Proces $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jeżeli początkowa kwota wynosiłaby $S_0 = 0$ PLN.

(iii) Proces $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jeżeli początkowa kwota wynosiłaby $S_0 = 0$ PLN, zaś $p = q = \frac{1}{2}$, niezależnie od wysokości wpłat/wypłat A, B.

(iv) Proces $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ zwrotów z funduszu określony jako $Z_n = S_n - S_0 = \sum_{k=1}^{n} X_k$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dla dowolnej kwoty początkowej i dowolnych $p, q > 0$, $p + q = 1$, jeżeli $A = B = 1$ PLN.

(v) Proces $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ zwrotów z funduszu określony jako $Z_n = S_n - S_0 = \sum_{k=1}^{n} X_k$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dla dowolnej kwoty początkowej i $p = \frac{B}{A+B}, q = \frac{A}{A+B}$.

Spośród powyższych stwierdzeń prawdziwych jest:

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

2. Dana jest renta wieczysta wypłacająca na koniec roku k kwotę $k(-1)^k + a$, gdzie $k = 1,2,...$, zaś $a > 0$ jest pewną liczbą. Przy jakiej wartości parametru a wartość obecna tej renty wynosi zero? Do obliczeń przyjmij roczną efektywną stopę dyskontową i = 4%. Odpowiedź (podaj najbliższą wartość).

A) 0.05
B) 0.04
C) 0.03
D) 0.02
E) 0.01

3. Rozważamy dwie terminowe renty odroczone A i B, płacące równe raty na koniec każdego roku w okresie wypłacania renty. Wiadomo, że:

- renta A rozpoczyna wypłaty 3 lata wcześniej niż renta B,
- renta B kończy wypłaty 5 lat po zakończeniu wypłat renty A,
- rata renty B jest o 20% większa od raty renty A,
- $\lim_{i \to \infty} d(A+B) = 10$, $\lim_{i \to 0} d(A+B) = \frac{568}{31}$, gdzie *d(A+B)* oznacza *duration* ciągu płatności generowanego przez obie renty A i B.
- przy założeniu, że renta A stanowi spłatę kredytu oprocentowanego na poziomie 5%, suma odsetek zapłaconych we wszystkich ratach renty A wynosi 360,64.

Oblicz różnicę pomiędzy obecną wartością renty B i obecną wartością renty A (wartość B – wartość A), przyjmując, że stopa procentowa wynosi 5%.

Podaj najbliższą wartość.

A) 82
B) 84
C) 86
D) 88
E) 90

4. Pożyczka jest spłacana za pomocą 20 rat płatnych na końcu każdego roku. Raty w pierwszych 10 latach są malejące i wynoszą 20, 18, 16, 14,..., 2. Raty w drugim dziesięcioleciu są rosnące i wynoszą 3, 3*1,5 , 3*(1,5)^2, ... , 3*(1,5)^9. Stopa procentowa jest równa *i*. Wyznacz sumę odsetek zapłaconych w ratach 3 i 7 oraz wartości kapitału spłaconego w racie 14. Wskaż właściwy wzór.

A)

$$a_{\overline{8}|}(4i-2)+a_{\overline{4}|}(8i-2)+8v^4(1+2v^2)+3iv^5\frac{1-(1{,}5v)^7}{1-1{,}5v}(1+v^4)+\frac{81}{8}\left(1-vi\frac{1-(1{,}5v)^{10}}{1-1{,}5v}\right)$$

B)

$$a_{\overline{8}|}(16i-2)+a_{\overline{4}|}(8i-4)+4v^4(1+2v^4)+3iv^7\frac{1-(1{,}5v)^{10}}{1-1{,}5v}(1+v^4)+\frac{81}{8}\left(1-vi\frac{1-(1{,}5v)^{5}}{1-1{,}5v}\right)$$

C)

$$a_{\overline{8}|}(16i-2)+a_{\overline{4}|}(4i-2)+8v^4(1+v^4)+3iv^7\frac{1-(1{,}5v)^{10}}{1-1{,}5v}(1+v^4)+\frac{81}{8}\left(1-vi\frac{1-(1{,}5v)^{7}}{1-1{,}5v}\right)$$

D)

$$a_{\overline{8}|}(8i-2)+a_{\overline{4}|}(16i-2)+8v^4(1+v^4)+3iv^5\frac{1-(1{,}5v)^7}{1-1{,}5v}(1+v^4)+\frac{81}{8}\left(1-vi\frac{1-(1{,}5v)^{10}}{1-1{,}5v}\right)$$

E)

$$a_{\overline{8}|}(16i-2)+a_{\overline{4}|}(8i-2)+8v^4(1+2v^4)+3iv^5\frac{1-(1{,}5v)^{10}}{1-1{,}5v}(1+v^4)+\frac{81}{8}\left(1-vi\frac{1-(1{,}5v)^{7}}{1-1{,}5v}\right)$$

5. Kredyt o wartości 100 000, oprocentowany na poziomie 6%, może być spłacony na dwa sposoby, rentami płatnymi na końcu każdego roku.

Sposób 1:

- kredyt spłacany jest przez 7 lat,
- każda rata kredytu począwszy od drugiej jest większa od poprzedniej o stałą wartość R,

Sposób 2:

- kredyt spłacany jest przez 18 lat,
- pierwsza rata jest taka sama jak w Sposobie 1,
- kolejne raty maleją o wartość R.

Wiadomo, że gdyby spłacać ten kredyt równymi ratami płatnymi na końcu roku, a wysokość raty byłaby równa wysokości pierwszej raty w sposobie 1, to należałoby dokonać 8 regularnych wpłat oraz uzupełnić je dodatkową płatnością w wysokości 6914.73 na końcu 9 roku.

Wskaż wartość R.

A) 862.1

B) 872.1

C) 882.1

D) 892.1

E) nie istnieje R spełniające warunki zadania

6. Inwestor kupił w dniu emisji dwie obligacje:

- 5 letnią obligację zero kuponową o wartości wykupu 50 000,
- 10 letnią obligację o wartości wykupu 60 000, wypłacającą (na końcu roku) w latach nieparzystych kupon o wartości 3 000, a w latach parzystych kupon o wartości 4 000.

Obligacja zero kuponowa została kupiona z 7.5% dyskontem, natomiast cena zakupu drugiej obligacji została ustalona przy stopie procentowej 7%.

Inwestycja została sfinansowana w 70% za pomocą kredytu oprocentowanego na poziomie 6%, natomiast pozostałą część inwestor opłacił z własnych środków.

Odsetki otrzymane z obligacji są reinwestowane w funduszu inwestycyjnym, którego stopa zwrotu wynosi 7%.

Na końcu 5 roku trwania inwestycji inwestor sprzedał obie obligacje, przy czym cena sprzedaży obligacji 10 letniej została ustalona przy stopie procentowej 6%. Uzyskane środki inwestor natychmiast umieścił w funduszu inwestycyjnym.

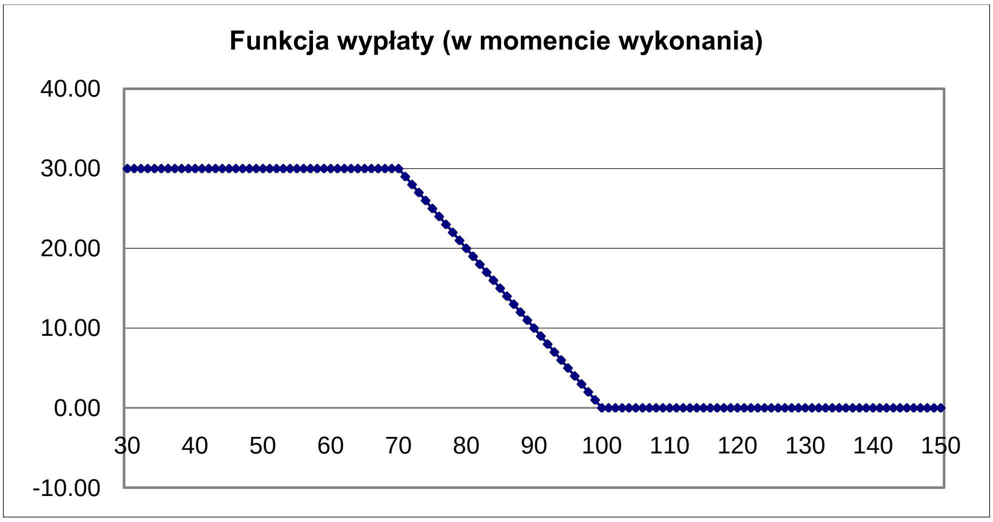
Po upływie następnych 2 lat inwestor wycofał wszystkie środki z funduszu inwestycyjnego i spłacił kredyt w całości wraz z należnymi odsetkami.

Oblicz efektywną (roczną) stopę zwrotu z zainwestowanych środków własnych.

Podaj najbliższą wartość.

A) 4.7%
B) 5.0%
C) 5.3%
D) 5.6%
E) 5.9%

7. Inwestor stosuje strategię typu *spread niedźwiedzia (Bear spread*) zbudowaną w oparciu o europejskie opcje kupna o okresie wykonania 8 lat. Uwzględniająca koszty przyjęcia pozycji w opcjach wypłata, w zależności od ceny S_8 instrumentu bazowego w momencie wykonania, przedstawiona jest na rysunku:



Obecne $(t=0)$ ceny europejskich opcji sprzedaży wystawionych na instrument bazowy o kursie bieżącym $S_0=95$, okresie wykonania 8 lat i cenie wykonania X przedstawione są w tabeli:

Cena wykonania X	Cena opcji sprzedaży
70	0.0124
95	0.0174
100	0.0220

Zmienność σ (*volatility*) instrumentu bazowego jest równa 20%, wolna od ryzyka stopa procentowa wynosi 5% (kapitalizacja ciągła).

Obecny koszt, jaki poniósł inwestor przyjmując *strategię niedźwiedzia* wynosi (podaj najbliższą wartość):

A) - 29.99

B) - 21.77

C) - 20.10

D) 0.02

E) 16.75

Uwaga: Ujemny koszt oznacza premię.

8. Inwestor działający na rynku opcji na akcje otrzymał w momencie $t=0$ następujące kwotowania:

- obecna cena akcji A: 100 PLN,
- zmienność (*volatility*) ceny akcji jest stała i wynosi 25%
- intensywność wolnego od ryzyka oprocentowania jest stała i wynosi 5% w skali roku,
- europejska opcja kupna na 1 akcje A z ceną wykonania 95 PLN, wygasająca za 6 miesięcy kosztuje 7.34 PLN,
- europejska opcja sprzedaży na 1 akcję A z ceną wykonania 95 PLN, wygasająca za 6 miesięcy kosztuje 0.75 PLN.

Inwestor uważa, że wykorzystując jedną akcję A istnieje możliwość zrealizowania zysku arbitrażowego. Strategia arbitrażowa ma opierać się na zajęciu odpowiednich pozycji na rynku opcji oraz na rynku akcji i instrumentów wolnych od ryzyka. Zysk arbitrażowy na moment $t=0$ wynosi (do obliczeń przyjmij kapitalizację ciągłą, dopuszczamy możliwość krótkiej sprzedaży akcji bez kosztów transakcyjnych):

A) 0.513 PLN
B) 0.756 PLN
C) 0.775 PLN
D) 6.757 PLN
E) 7.526 PLN

9. Niech $S(t)$ będzie ceną spot akcji w chwili (roku) t. Akcja ta nie wypłaca dywidendy w najbliższym roku. Rozważmy kontrakt, który po roku daje posiadaczowi wypłatę $S(1)^3/S(0)$. Intensywność oprocentowania ciągłego wynosi 4% w skali roku, a zmienność σ ceny akcji wynosi 40%. Zakładamy ponadto, że cena akcji opisana jest przez proces:

$$S(t) = A(t) \cdot \exp(\sigma\sqrt{t}Z), \qquad t > 0,$$

gdzie , $Z \sim N(0,1)$, a $A(t) > 0$ jest pewną funkcją rzeczywistą i rynek nie dopuszcza arbitrażu. Wyznaczyć cenę kontraktu w chwili 0. Podaj najbliższą odpowiedź.

A) $S^2(0) \cdot \exp(1.28)$

B) $S^2(0) \cdot \exp(0.64)$

C) $S^2(0) \cdot \exp(0.56)$

D) $S^2(0)$

E) $S^2(0) \cdot \exp(-0.1)$

10. Dwuletnia obligacja korporacyjna o nominale 1 000 i kuponie 7% płatnym rocznie jest wyceniana w momencie emisji na kwotę 973.16. Ponadto, wiadomo, że:

- roczna obligacja rządowa o nominale 1 000 z 5% kuponem płatnym rocznie wyceniona jest w momencie emisji na kwotę 1 000,
- dwuletnia obligacja rządowa o nominale 1 000 z 5% kuponem płatnym rocznie jest wyceniona w momencie emisji na kwotę 1 009.16.

Załóżmy, że obligacje rządowe wyceniane są przy użyciu stóp wolnych od ryzyka. Jakiego stałego w czasie narzutu na ryzyko kredytowe używa rynek przy wycenie tej obligacji? Podaj najbliższą odpowiedź:

A) 2.50%
B) 3.00%
C) 3.50%
D) 4.00%
E) 4.50%

Egzamin dla Aktuariuszy z 13 grudnia 2010 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	E	
3	D	
4	E	
5	D	
6	A	
7	C	
8	B	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.