Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LIV Egzamin dla Aktuariuszy z 4 października 2010 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Na rynku dostępna jest amerykańska koszykowa opcja kupna o okresie wygaśnięcia 3 lata, wystawiona na koszyk złożony z walorów S_i, $i = 1,2,3$ z wagami $w_i \geq 0$, $i = 1,2,3$ gdzie w_i oznacza wagę waloru i, zatem: $\sum_{i=1}^{3} w_i = 1$.

Początkowe (w chwili zero) wagi walorów w koszyku, ich ceny i odchylenia standardowe tych cen są dane:

Walor	Wagi w chwili zero	Cena waloru w chwili zero	Odchylenie standardowe ceny waloru w chwili zero
S_1	45%	120	7.00%
S_2	20%	95	5.00%
S_3	35%	114	8.50%

Cena wykonania opcji jest równa początkowej cenie koszyka.

Ponadto wiadomo, że w całym okresie życia opcji ceny walorów są ze sobą skorelowane według następującej macierzy korelacji:

$Corr(S_i, S_j)$	S_1	S_2	S_3
S_1	1	0.25	0.5
S_2	0.25	1	0.25
S_3	0.5	0.25	1

Wiadomo również, że wypadkowa cena koszyka walorów $\{S_1, S_2, S_3\}$ rośnie bądź spada w każdym roku (w odniesieniu do wartości z poprzedniego roku) o stały procent równy początkowemu odchyleniu standardowemu ceny koszyka. W chwili zero cena koszyka jest równa swojej wartości początkowej.

Przyjmując założenia braku arbitrażu, rynku zupełnego i doskonałego oraz stałą roczną wolną od ryzyka stopę procentową 5.5% (kapitalizacja dyskretna) podaj cenę amerykańskiej koszykowej opcji kupna w chwili zero (podaj najbliższą wartość):

A) 11.48
B) 11.55
C) 16.76
D) 16.94
E) 17.03

Wskazówka

Opcja koszykowa (*basket option*) jak sugeruje jej nazwa, jest kontraktem, który służy zabezpieczeniu całego koszyka walorów, tzn. specyficznego portfela instrumentów. Opcja ta daje nabywcy prawo do kupna bądź sprzedaży określonej ilości akcji kilku spółek lub kilku indeksów różnych rynków giełdowych (instrumentem bazowym jest koszyk walorów).

2. W danym momencie t_0 i przy założonej rocznej stopie procentowej $r_0 > 0$ zakład ubezpieczeń przyjmuje strategię zabezpieczającą spełniającą trzy warunki:

1) dopasowanie obecnej wartości zobowiązań $V_L(r_0, t_0)$ do wartości godziwej aktywów $V_A(r_0, t_0)$ kryjących te zobowiązania:
$$V_A(r_0, t_0) = V_L(r_0, t_0) \text{ oraz}$$
2) utrzymanie takiej samej wrażliwości aktywów i zobowiązań względem wahań stopy procentowej, oraz
3) zapewnienie, że dla wahań stopy procentowej w granicach r_0 +/- 100 p.p. wartość zobowiązań przewyższy wartość aktywów kryjących te zobowiązania, tzn.:
$$\max_{r \in \langle r_0 - 1\%, r_0 + 1\% \rangle} \{V_A(r, t_0) - V_L(r, t_0)\} = 0$$

Zakład ubezpieczeń stosuje powyższą strategię w odniesieniu do zobowiązania wynikającego z dwóch rent pewnych płacących 1 000 PLN na koniec każdego roku i wygasających odpowiednio po 5, 10 latach.

Aktywami zakupionymi w celu pokrycia tego zobowiązania są dwie obligacje zero-kuponowe o nominałach: X_1 oraz X_2 i okresach do wygaśnięcia t_1 oraz t_2, odpowiednio.

Które z poniższych parametrów pozwalają zrealizować założenia strategii zabezpieczającej przy stałej stopie procentowej $r_0 = 7\%$ (kapitalizacja dyskretna):

A) $t_1 = 5$; $t_2 = 10$; $X_1 = 9\,234\ PLN$; $X_2 = 8\,932\ PLN$

B) $t_1 = 3$; $t_2 = 7$; $X_1 = 9\,611\ PLN$; $X_2 = 5\,265\ PLN$

C) $t_1 = 7$; $t_2 = 6$; $X_1 = 8\,212\ PLN$; $X_2 = 9\,020\ PLN$

D) $t_1 = 9$; $t_2 = 10$; $X_1 = 10\,980\ PLN$; $X_2 = 10\,134\ PLN$

E) $t_1 = 5$; $t_2 = 8$; $X_1 = 7\,357\ PLN$; $X_2 = 10\,100\ PLN$

3. Pożyczka o wartości nominalnej K będzie spłacana rocznymi równymi ratami o wartości R, płatnymi na koniec roku, przy czym ostatnia rata kończąca spłatę pożyczki, o wartości nie większej niż R, zostanie wpłacona rok po ostatniej regularnej płatności równej R.

Przy spłacie pożyczki używane są dwie roczne stopy procentowe i =5% i j = 4% (tzw. step-rates). Stopa i stosowana jest do obliczania odsetek w przypadku „podstawowej" części pożyczki o wartości 1000, natomiast stopę j używamy w odniesieniu do tej części niespłaconego kapitału, która stanowi nadwyżkę ponad 1000. W schemacie tym zakłada się, że najpierw spłacana jest ta część pożyczki, która przewyższa „podstawowy" 1000.

Wiadomo, że pierwszy raz wartość niespłaconego kapitału będzie niższa od 1000 po zapłaceniu 20 raty i będzie wynosić 915.53. Ponadto wiadomo, że kapitał jaki zostanie spłacony w 8 racie wynosi 92.12.

Oblicz ile wynosi iloraz R/K.

Podaj najbliższą wartość.

A) 0.065
B) 0.067
C) 0.069
D) 0.071
E) 0.073

4. Kredyt w wartości nominalnej 1000, zaciągnięty na okres 6 lat, jest spłacany w równych ratach o wartości 200.38 na koniec każdego roku.

Oprocentowanie kredytu wynosi:

- 7% w roku 1 i 4,
- 5% w roku 3 i 6 oraz
- X w roku 2 i 5

Oblicz wartość X.

Podaj najbliższą wartość.

A) 2.5%
B) 3.0%
C) 3.5%
D) 4.0%
E) 4.5%

5. Dany jest nieskończony ciąg rent wieczystych wypłacanych w następujący sposób: k-ta płatność n-tej renty (n=1,2,3...) ma wysokość $k*(k+1)$, dla k=1,2,3.... a pierwsza płatność n-tej renty następuje na koniec roku n. Wyznacz duration ciągu płatności rent dla rocznej efektywnej stopy dyskontowej i=10%. Odpowiedź (podaj najbliższą wartość).

A) 38
B) 39
C) 40
D) 41
E) 42

Wskazówka

$$\sum_{j=1}^{m} j^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$Dla\ 0 < v < 1\ mamy$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 v^k = \frac{v}{(1-v)^3}(1+v)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^3 v^k = \frac{v}{(1-v)^4}(1+4v+v^2)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^4 v^k = \frac{v}{(1-v)^5}(1+11v+11v^2+v^3)$$

6. Cena europejskiej opcji sprzedaży o terminie realizacji T = 1 rok, wynosi P = 0.71 w chwili 0. Aktualna (w chwili 0) cena akcji nie płacącej dywidendy wynosi $S_0 = 40$, zaś cena wykonania K = 35. Roczna ciągła stopa procentowa wolna od ryzyka wynosi $\delta = 5\%$. Wyznacz wartość rocznej opcji kupna C dla tego samego instrumentu podstawowego z ceną wykonania K przy założeniu braku arbitrażu. Odpowiedź (podaj najbliższą wartość).

A) 7.4
B) 7.6
C) 7.8
D) 8.0
E) 8.2

7. Zasady spłacania pożyczki o wartości nominalnej K, są następujące:

- 15 rat płaconych w odstępach rocznych,
- pierwsza rata zostanie zapłacona półtora roku od daty otrzymania pożyczki,
- pierwszych 6 rat spełnia warunek, iż każda jest o 10% większa od poprzedniej (oczywiście oprócz pierwszej raty),
- pozostałe raty spełniają warunek, iż każda rata jest o 1 większa od poprzedniej (dotyczy to również 7 raty),
- stopa oprocentowania w okresie pierwszych 6.5 lat wynosi *i*,
- w pozostałym okresie stopa jest równa *j*.

Wskaż, który z poniższych wzorów wyraża wielkość pierwszej raty.

A) $$\frac{K * j * (1+i)^{6,5} - 10 * v_j^9 + a_{\overline{9}|j}}{(1+i)^6 * j * \frac{1-(1,1 * v_i)^6}{1-1,1 * v_i} + 1,1^5 * (1-v_j^9)}$$

B) $$\frac{K * j * (1+i)^{6} - 10 * v_j^9 + a_{\overline{9}|j} + 1}{(1+i)^{6,5} * j * \frac{1-(1,1 * v_i)^6}{i-0,1} + 1,1^5 * (1-v_j^9)}$$

C) $$\frac{K * j * (1+i)^{6,5} - 10 * v_j^9 + a_{\overline{9}|j}}{(1+i)^6 * j * \frac{1-(1,1 * v_i)^6}{i-0,1} + 1,1^{6,5} * (1-v_j^9)}$$

D) $$\frac{K * j * (1+i)^{6,5} - 10 * v_j^9 + a_{\overline{9}|j} + 1}{(1+i)^6 * j * \frac{1-(1,1 * v_i)^6}{1-1,1 * v_i} + 1,1^{6,5} * (1-v_j^9)}$$

E) $$\frac{K * j * (1+i)^{6,5} - 10 * v_j^9 + a_{\overline{9}|j} + 1}{(1+i)^6 * j * \frac{1-(1,1 * v_i)^6}{i-0,1} + 1,1^5 * (1-v_j^9)}$$

8. Rozważmy następujący model wyceny obligacji, w którym:

- dostępne są 4 obligacje zerokuponowe o nominale 1 wygasające w chwilach 1, 2, 3 i 4, odpowiednio;
- ceny tych obligacji w chwili 0 wynoszą odpowiednio: $P(0,1) = 0.9$, $P(0,2) = 0.81$, $P(0,3) = 0.729$, $P(0,4) = 0.6561$ (gdzie $P(0,T)$ oznacza cenę w chwili 0 obligacji wygasającej w momencie T).

Wiadomo, że w chwili 1 wystąpi jeden z 3 możliwych stanów rynku: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Ceny obligacji w chwili 1, w każdym ze stanów dane są w tabeli:

	ω_1	ω_2	ω_{13}
$P(1,2)$	0.880	0.900	0.930
$P(1,3)$	0.670	0.850	0.920
$P(1,4)$	x	0.820	0.890

Żadne transakcje nie są możliwe pomiędzy chwilami 0 i 1. Wyznaczyć wartość x, przy której model ten jest wolny od arbitrażu wynosi (podaj najbliższą wartość):

A) 0.800

B) 0.729

C) 0.500

D) 0.470

E) 0.450

9. Rozważmy następujący, dyskretny model struktury terminowej stóp procentowych:

- W chwili $t = 0$ krzywa stóp procentowych zadana jest funkcją: $r(0,T) = 4\%$, $T = 1, 2, 3, \ldots$, gdzie $r(0,T)$ oznacza T-letnią stopę *spot* w ujęciu rocznym w chwili 0.
- W chwilach $t = 1, 2, 3, \ldots$ krzywa stóp procentowych $r(t,T)$ zadana jest funkcją: $r(t,T) = 4\% + X$, $T = 1, 2, 3, \ldots$, gdzie X jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-4\%, 4\%]$. Funkcja $r(t,T)$ oznacza T-letnią stopę *spot* w ujęciu rocznym w chwili t.

W chwili $t = 0$ emitowana jest obligacja zerokuponowa o nominale 1 000, zapadająca w chwili $t = 3$. Niech $P(t)$ oznacza cenę tej obligacji w chwili t.

Ceny obligacji w chwilach $t = 0,\ t = 1$, i $t = 2$ wyznaczone przy pomocy opisanego modelu stopy procentowej wynoszą (podać najbliższą odpowiedź):

A) $P(0) = 889.00$, $P(1) = 925.93$, $P(2) = 962.01$

B) $P(0) = 793.83$, $P(1) = 925.93$, $P(2) = 962.01$

C) $P(0) = 889.00$, $P(1) = 924.56$, $P(2) = 961.54$

D) $P(0) = 793.83$, $P(1) = 924.56$, $P(2) = 961.54$

E) $P(0) = 889.00$, $P(1) = 925.93$, $P(2) = 961.54$

10. Dwie osoby zaciągnęły w tej samej chwili kredyty hipoteczne w kwocie 300 000 spłacane w okresie 40 lat, rocznymi ratami w równej wysokości, płatnymi na koniec każdego roku.

Osoba A spłaca kredyt przy oprocentowaniu 7%, a osoba B 8%.

Warunki kredytu musiały zostać zmienione po zapłaceniu 15 raty. Nowe stopy oprocentowania dla osób A i B wynoszą odpowiednio 8% i 9%. Według tych stóp zostały wyliczone nowe raty spłaty kredytu w jednakowej wysokości, płatne na koniec każdego roku, przez pozostały okres 25 lat.

Niestety po zapłaceniu 30 raty, na początku 31 roku okresu spłacania kredytu, warunki kredytu znowu musiały być renegocjowane. Osoba A dokończy spłacać kredyt przy stopie procentowej 11%, a osoba B przy stopie 10%. Nowe raty będą jednakowej wysokości i tak jak poprzednio będą płatne na koniec każdego roku.

Oblicz różnicę sumy rat zapłaconych przez osobę B i osobę A (raty B – raty A) w okresie od początku 11 roku (już po zapłaceniu 10 raty) do końca 35 roku (włącznie z 35 ratą) okresu spłacania kredytu.

Podaj najbliższą wartość.

A) 48 000
B) 51 000
C) 54 000
D) 57 000
E) 60 000

Egzamin dla Aktuariuszy z 4 października 2010 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	B	
3	B	
4	D	
5	D	
6	A	
7	E	
8	D	
9	A	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.