Zadanie 1

Niech $X_1, X_2, ..., X_8$ będzie próbką z rozkładu prawdopodobieństwa Pareto o dystrybuancie

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\theta} & dla \;\; x \geq 1; \\ 0 \quad dla \; x < 1, \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.
Rozpatrzmy zadanie testowania hipotezy $H_0 : \theta = 2$ przeciwko alternatywie $H_1 : \theta = 4$.
Zbudowano taki test, dla którego *suma* prawdopodobieństw błędów I i II rodzaju, oznaczanych odpowiednio przez α i β, jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą wartość $\alpha + \beta$.

(A) 0,2007

(B) 0,3336

(C) 0,0258

(D) 0,1000

(E) 0,4025

Zadanie 2

W urnie znajduje się 100 ponumerowanych kul o numerach 1, 2, …, 100.
Losujemy bez zwracania 10 kul, zapisujemy numery, kule zwracamy do urny.
Czynność tę powtarzamy 10 razy. Oblicz wartość oczekiwaną liczby kul, które zostały wylosowane dokładnie dwa razy.

(A) 10

(B) 16

(C) 5,25

(D) 19,37

(E) 38,74

Zadanie 3

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f_\theta(x) = \exp\left(-2\left|x - \theta\right|\right)$$

Niech $T_n = X_{[0,5n]:n}$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby *x*.

Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

(A) $\lim_{n\to\infty} P\{(T_n - \theta)\sqrt{n} > 1\} = 0{,}023$

(B) $\lim_{n\to\infty} P\{|T_n - \theta|\sqrt{n} > 2\} = 0{,}32$

(C) $\lim_{n\to\infty} P\{T_n \le \theta\} = 1$

(D) $\lim_{n\to\infty} P\{|T_n - \theta|\sqrt{n} > 2\} = 0{,}046$

(E) $\lim_{n\to\infty} P\{T_n \ge \theta\} = 1$

Zadanie 4

Zakładamy, że zależność czynnika Y od czynnika x (nielosowego) opisuje model regresji liniowej $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$. Obserwujemy $2n$ elementową próbkę, w której $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = -1$ i $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{2n} = 1$. Zmienne losowe $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2n}$ są niezależne i błędy mają rozkłady normalne o wartości oczekiwanej 0, przy czym $Var\varepsilon_i = \sigma^2$, gdy $i = 1,2,\ldots,n$, i $Var\varepsilon_i = 9\sigma^2$, gdy $i = n+1, n+2, \ldots, 2n$. Wyznaczono estymatory $\hat{\beta}_0$ i $\hat{\beta}_1$ parametrów β_0 i β_1 wykorzystując ważoną metodę najmniejszych kwadratów, to znaczy minimalizując sumę $\sum_{i=1}^{2n} \frac{(Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{Var\varepsilon_i}$.

Wyznacz stałą z_1 tak, aby

$$P\left(|\hat{\beta}_1 - \beta_1| \sqrt{n} < z_1 \sigma\right) = 0{,}95.$$

Spośród podanych odpowiedzi wybierz odpowiedź będącą najlepszym przybliżeniem.

(A) $z_1 = 6{,}198$

(B) $z_1 = 5{,}544$

(C) $z_1 = 4{,}383$

(D) $z_1 = 2{,}772$

(E) $z_1 = 3{,}099$

Zadanie 5

Załóżmy, że X, Y są zmiennymi losowymi o łącznym rozkładzie normalnym, $E(X) = E(Y) = 0$, $Var(X) = 2$, $Var(Y) = 4$ i $Cov(X, Y) = 1$.

Oblicz $E(XY \mid X - Y = t)$.

(A) $-\frac{3}{4}t^2$

(B) $\frac{21}{8} - \frac{3}{16}t^2$

(C) $\frac{7}{4} - \frac{3}{16}t^2$

(D) $-\frac{3}{16}t^2$

(E) $\frac{7}{4} - \frac{3}{4}t^2$

Zadanie 6

Załóżmy, że $X_1,...,X_4$ jest próbką z rozkładu normalnego $N(\mu,1)$, zaś $Y_1,...,Y_9$ jest próbką z rozkładu normalnego $N(\mu,2^2)$, gdzie μ jest nieznanym parametrem.
Na podstawie próbki $X_1,\dots,X_4,Y_1,...,Y_9$ budujemy, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, test jednostajnie najmocniejszy dla weryfikowania hipotezy $H_0 : \mu = 0$ przy alternatywie $H_0 : \mu > 0$. Oblicz moc tego testu, gdy $\mu = 1$. Spośród podanych odpowiedzi wybierz odpowiedź będącą najlepszym przybliżeniem.

(A) 0,805

(B) 0,931

(C) 0,551

(D) 0,950

(E) 0,830

Zadanie 7

Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x} & \text{gdy } x > 0 \text{ i } y \in (0;1) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech $Z = X + 2Y$. Wtedy łączny rozkład zmiennych *Z, X* jest taki, że

(A) zmienne *Z* i *X* są niezależne;

(B) jego funkcja gęstości na zbiorze $\{(z, x):\ 0 < x < z < 2\}$ wyraża się wzorem $g(z, x) = \frac{1}{4} e^{-x}$;

(C) $E(Z \mid X = 2) = 4$;

(D) jego funkcja gęstości na zbiorze $\{(z, x):\ 0 < x < z < 2 + x\}$ wyraża się wzorem $g(z, x) = \frac{1}{2} e^{-x}$;

(E) jego funkcja gęstości na zbiorze $\{(z, x):\ 0 < x < z < 1 + x\}$ wyraża się wzorem $g(z, x) = e^{-x}$.

Zadanie 8

Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale [0; 1], zaś N jest zmienną losową o rozkładzie ujemnym dwumianowym:

$$P(N = n) = \binom{n+2}{n} p^3 (1-p)^n \text{ dla } n = 0,1,2,\ldots,$$

niezależną od zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$. Niech

$$M_N = \begin{cases} \max(X_1, X_2, \ldots, X_N) & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0. \end{cases}$$

Statystyk otrzymał trzy niezależne obserwacje zmiennej losowej M_N równe

$$0, \quad 0, \quad \frac{1}{2}.$$

Wartość estymatora największej wiarogodności dla parametru *p* otrzymana na podstawie tych danych jest równa

(A) 0,667

(B) 0,877

(C) 0,884

(D) 0,924

(E) 0,842

Zadanie 9

Załóżmy, że $X_1, X_2,..., X_n,...$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\mu} \exp(-x / \mu) \quad \text{dla} \quad x > 0.$$

Zmienna losowa N jest niezależna od $X_1, X_2,..., X_n,...$ i ma rozkład geometryczny dany wzorem:

$$\Pr(N = n) = \ p(1-p)^n \quad \text{dla} \quad n = 0,1,2,...$$

Niech $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (przy tym $S_0 = 0$, zgodnie z konwencją).

Oblicz $E(N \mid S_N = s)$, dla $s > 0$.

(A) s / μ

(B) sp / μ

(C) $sp / \mu + 1$

(D) $s(1-p) / \mu + 1$

(E) $s(1-p) / \mu$

Zadanie 10

Rozważmy następujący schemat urnowy:

W każdej z 10 urn znajdują się 2 kule, oznaczone liczbami:

- W urnie 1 znajdują się 2 kule oznaczone liczbą 1,
- w urnie 2 znajdują się 2 kule oznaczone liczbą 2,
- ....
- w urnie 10 znajdują się 2 kule oznaczone liczbą 10.

Losujemy kulę z urny 1 i przekładamy ją do urny 2. Następnie (po wymieszaniu kul) losujemy kulę z urny 2 i przekładamy do urny 3, itd., kulę wylosowaną z urny 9 przekładamy do urny 10, wreszcie losujemy kulę z urny 10. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta ostatnia wylosowana kula ma numer nie większy niż 6 ?

(A) $\frac{3}{10}$

(B) $\frac{1}{81}$

(C) $\frac{4}{11}$

(D) $\frac{2}{10}$

(E) $\frac{4}{81}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 marca 2010 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I.................................
~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	D	
3	A	
4	E	
5	C	
6	A	
7	D	
8	B	
9	D	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.