

Zadanie 1.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu gamma o gęstości

$$p(x) = \begin{cases} 16xe^{-4x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0. \end{cases}$$

Niech N będzie zmienną losową niezależną od zmiennych $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ spełniającą

$$P(N=0) = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad P(N=1) = P(N=2) = P(N=3) = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Niech } S = \begin{cases} 0 & \text{gdy } N=0 \\ \sum_{i=1}^N X_i & \text{gdy } N > 0. \end{cases}$$

Wtedy $E(S - ES)^3$ jest równe

(A) $\frac{1}{16}$

(B) $\frac{7}{16}$

(C) $\frac{3}{16}$

(D) $\frac{6}{16}$

(E) $\frac{9}{16}$

Zadanie 2.

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi każda z rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej 1.

Niech $U = 2X + Y$ i $V = X - Y$.

Wtedy prawdopodobieństwo $P(U \in (0, 6) \wedge V \in (0, 6))$ jest równe

(A) $1 - 2e^{-1}$

(B) $\frac{1}{2}(4e^{-3} - 3e^{-4})$

(C) $\frac{1}{2}(1 - 4e^{-3} + 3e^{-4})$

(D) $1 - e^{-3}$

(E) $1 - 2e^{-1}$

Zadanie 3.

Niech X_1, X_2, \dots, X_n , będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie gamma z gęstością

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \theta^2 x e^{-\theta x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$

Budujemy estymator wariancji czyli funkcji $v(\theta) = \frac{2}{\theta^2}$ postaci $\hat{v} = c \cdot \text{ENW}(v(\theta))$, gdzie $\text{ENW}(v(\theta))$ oznacza estymator największej wiarygodności funkcji v . Jeśli wiadomo, że \hat{v} jest nieobciążony, to stała c jest równa

(A) $\frac{n}{1+2n}$

(B) $2n$

(C) $\frac{1+2n}{n}$

(D) $\frac{2n}{1+2n}$

(E) $\frac{1+2n}{2n}$

Zadanie 4.

Rozpatrzmy następujący model regresji liniowej bez wyrazu wolnego:

$$Y_i = \beta \cdot x_i + \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, 16),$$

gdzie $x_i > 0$ są znanymi liczbami, β jest nieznanym parametrem, zaś ε_i są błędami losowymi. Zakładamy, że ε_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych i

$$E[\varepsilon_i] = 0 \quad \text{i} \quad \text{Var}[\varepsilon_i] = x_i^2 \quad (i = 1, \dots, 16).$$

Niech $\hat{\beta}$ będzie estymatorem parametru β o następujących własnościach:

$\hat{\beta}$ jest liniową funkcją obserwacji, tzn. jest postaci $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{16} c_i Y_i$,

$\hat{\beta}$ jest nieobciążony,

$\hat{\beta}$ ma najmniejszą wariancję spośród estymatorów liniowych i nieobciążonych.

Wyznaczyć stałą c taką, że spełniony jest warunek

$$P(|\hat{\beta} - \beta| < c) = 0,95.$$

(A) $c = 0,49$

(B) $c = \frac{7,84}{\sqrt{\sum_{i=1}^{16} x_i}}$

(C) $c = 1,64$

(D) $c = 0,49 \sqrt{\sum_{i=1}^{16} x_i}$

(E) $c = \frac{1,96}{\sqrt{\sum_{i=1}^{16} x_i}}$

Zadanie 5.

Niech X_1, \dots, X_n , $n > 1$, będzie próbką z rozkładu jednostajnego o gęstości danej wzorem:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 1/\theta & \text{dla } 0 \leq x \leq \theta; \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.

Zmienne losowe X_1, \dots, X_n nie są w pełni obserwowalne. Obserwujemy zmienne losowe $Y_i = \min(X_i, M)$, gdzie M jest ustaloną liczbą dodatnią. Oblicz estymator największej wiarygodności $\hat{\theta}$ parametru θ jeśli wiadomo, że w próbce Y_1, \dots, Y_n , jest K obserwacji o wartościach mniejszych niż M i $K \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

(A) $\hat{\theta} = M + \frac{n}{K}$

(B) $\hat{\theta} = \frac{Mn}{K}$

(C) $\hat{\theta} = \frac{Mn}{n-K}$

(D) $\hat{\theta} = M + \frac{n-K}{n}$

(E) nie można zastosować metody największej wiarygodności w tym modelu

Zadanie 6.

Rozważmy następujące zagadnienie testowania hipotez statystycznych. Dysponujemy próbką X_1, \dots, X_n z rozkładu normalnego o nieznannej średniej μ i znanej wariancji równej 4. Przeprowadzamy najmocniejszy test hipotezy $H_0: \mu = 0$ przeciwko alternatywie $H_1: \mu = -1$ na poziomie istotności $\alpha = 1/2$. Niech β_n oznacza prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju, dla rozmiaru próbki n .

Wybierz poprawne stwierdzenie:

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n n = 1$

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \sqrt{n} = 1$

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n e^{\frac{n}{8}} = 1$

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \frac{e^{\frac{n}{8}} \sqrt{\pi n}}{\sqrt{2}} = 1$

(E) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \frac{e^{\frac{n}{8}} \sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} = 1$

Zadanie 7.

W urnie znajduje się 20 kul białych, 20 kul czarnych i 20 kul niebieskich. Losujemy bez zwracania 24 kule. Niech

- X oznacza liczbę wylosowanych kul białych,
- Y oznacza liczbę wylosowanych kul czarnych,
- Z oznacza liczbę wylosowanych kul niebieskich.

Współczynnik korelacji zmiennych losowych $X + 2Y$ i Z ,
 $corr(X + 2Y, Z)$,

jest równy

(A) -1

(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $-\frac{3}{4}$

(D) 0

(E) $-\frac{1}{2}$

Zadanie 8.

Niech X_1, \dots, X_n, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Pareto o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 1$ jest ustalone.

Niech N będzie zmienną losową niezależną od X_1, \dots, X_n, \dots , o rozkładzie geometrycznym

$$P(N = n) = (1-q)q^n \quad \text{gdy } n = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie $q \in (0, 1)$ jest ustaloną liczbą.

Niech

$$Z = \begin{cases} \min\{X_1, \dots, X_N\}, & \text{gdy } N > 0; \\ 0 & \text{gdy } N = 0. \end{cases}$$

Oblicz $E(N | Z = z)$ przy założeniu, że $z > 0$.

(A) $\frac{2(1+z)^\theta}{(1+z)^\theta + q}$

(B) $\frac{2(1+z)^\theta}{(1+z)^\theta - q}$

(C) $\frac{(1+z)^\theta + 3q}{(1+z)^\theta + q}$

(D) $\frac{(1+z)^\theta + q}{(1+z)^\theta - q}$

(E) $\frac{(1+z)^\theta}{(1+z)^\theta - q}$

Zadanie 9.

Rozważamy łańcuch Markowa X_1, X_2, \dots na przestrzeni stanów $\{0, 1, 2\}$ o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

(gdzie $P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ dla $i, j = 0, 1, 2$).

Niech $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach w zbiorze $\{0, 1\}$, niezależnych od siebie nawzajem i od zmiennych $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa:

$$P(Z_i = 1) = \frac{3}{4} \text{ i } P(Z_i = 0) = \frac{1}{4}.$$

Niech $Y_i = Z_i \cdot X_i$. Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n > Y_{n+1})$ jest równy

- A) $\frac{32}{144}$
- (B) $\frac{57}{144}$
- (C) $\frac{35}{144}$
- (D) $\frac{26}{144}$
- (E) $\frac{41}{144}$

Zadanie 10.

Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{gd}y \ x \geq \theta \\ 0 & \text{gd}y \ x < \theta \end{cases}$$

gdzie $\theta \in R$ jest nieznanym parametrem. Zbudowano test jednostajnie najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy $H_0: \theta = 0$ przy alternatywie $H_1: \theta \neq 0$ na poziomie istotności $\alpha \in (0,1)$.

Obszar krytyczny tego testu jest równy

(A) $\left\{ \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{-\ln \alpha}{n}, +\infty\right) \right\}$

(B) $\left\{ \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \in \left(-\infty, \frac{\ln \alpha}{n}\right) \cup \left(\frac{-\ln \alpha}{n}, +\infty\right) \right\}$

(C) $\left\{ \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \in \left(0, \frac{-\ln(1-\alpha)}{n}\right) \right\}$

(D) $\left\{ \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \in \left(-\infty, \frac{-1}{n} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \cup \left(\frac{\ln 2 - \ln \alpha}{n}, +\infty\right) \right\}$

(E) $\left\{ \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \in \left(-\infty, -\frac{\ln(1-\alpha)}{n}\right) \right\}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 5 października 2009 r.**Prawdopodobieństwo i statystyka****Arkuszu odpowiedzi***

Imię i nazwisko : KLUCZ ODPOWIEDZI
Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	C	
3	D	
4	A	
5	B	
6	D	
7	B	
8	D	
9	E	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.