Zadanie 1.
Liczba szkód w każdym z trzech kolejnych lat dla pewnego ubezpieczonego ma rozkład równomierny:
$\Pr(N = k) = 1/10$ dla $k = 0, 1, \ldots, 9$.
Liczby szkód w kolejnych latach są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Prawdopodobieństwo, że w ciągu 3 lat ubezpieczony będzie miał w sumie nie więcej niż 7 szkód wynosi:

(A) 0.084

(B) 0.100

(C) 0.120

(D) 0.150

(E) 0.165

Zadanie 2.
W klasycznym modelu procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wypłat,
- proces $N(t)$ i pojedyncze wypłaty $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są niezależne.

Niech L oznacza maksymalną stratę, F_L jej dystrybuantę, zaś $\Psi(u)$ prawdopodobieństwo ruiny przy nadwyżce początkowej u. Wiadomo, że zachodzi:

$$F_L(u) = 1 - \Psi(u) = \Pr(\forall t \geq 0 \quad U(t) \geq 0).$$

Załóżmy, że wypłaty Y_i mają rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną μ, oraz iż parametr intensywności składki c wynosi $c = 110\% \lambda \mu$.

Wartość funkcji $\Psi(u)$ w punkcie $u = \mathrm{E}(L) + 1.96\sqrt{\mathrm{var}(L)}$ wynosi:

(A) 2.5%

(B) 3.4%

(C) 4.3%

(D) 5.2%

(E) 6.1%

Zadanie 3.
W pewnym ubezpieczeniu działa 4-klasowy system *No Claim Discount*. Składki roczne wynoszą:

- 200 zł w klasie 1
- 155 zł w klasie 2,
- 125 zł w klasie 3,
- 100 zł w klasie 4.

Przejście z klasy do klasy następuje corocznie, przy czym po roku bezszkodowym ubezpieczony z klasy 1 przechodzi do 2, z klasy 2 do 3, z klasy 3 do 4, a jeśli był w klasie 4, to dalej w niej pozostaje. Po roku ze szkodą (lub szkodami) ubezpieczony zawsze przechodzi do klasy 1.

Rozważmy ubezpieczonego, który generuje w kolejnych latach szkody zgodnie z procesem Poissona o częstotliwości $\lambda = (\ln 5 - \ln 4)$ rocznie. Załóżmy, że każdą szkodę zgłasza natychmiast po jej zajściu.

Wartość oczekiwana składki płaconej przez niego w n-tym roku ubezpieczenia dąży przy $n \to \infty$ do granicy równej:

(A) 128 zł

(B) 132 zł

(C) 136 zł

(D) 140 zł

(E) 144 zł

Zadanie 4.

Niech:

- Y będzie zmienną losową o rozkładzie Gamma (α, β), z wartością oczekiwaną równą $\alpha\beta^{-1}$ i wariancją $\alpha\beta^{-2}$.
- R będzie liczbą z przedziału $(0, \beta)$.

Wtedy:

$$\inf_{d>0} \mathrm{E}\left[\exp\left(R(Y-d)\right) \middle| Y > d\right]$$

wynosi:

(A) $\dfrac{\beta}{\beta - R}$ dla $\alpha > 1$, zaś $\left(\dfrac{\beta}{\beta - R}\right)^{\alpha}$ dla $\alpha \in (0,1)$

(B) jeden dla $\alpha > 1$, zaś $\left(\dfrac{\beta}{\beta - R}\right)^{\alpha}$ dla $\alpha \in (0,1)$

(C) jeden dla dowolnych $\alpha > 0$

(D) $\dfrac{\beta}{\beta - R}$ dla dowolnych $\alpha > 0$

(E) $\left(\dfrac{\beta}{\beta - R}\right)^{\alpha}$ dla dowolnych $\alpha > 0$

Zadanie 5.
Liczba szkód w ciągu roku w pewnym ubezpieczeniu równa jest:

$N = M_1 + ... + M_K$, gdzie:

- $K, M_1, M_2, M_3, ...$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, zaś $M_1, M_2, M_3, ...$ mają identyczny rozkład prawdopodobieństwa
- K oznacza liczbę wypadków, i ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ,
- M_i jest liczbą szkód z i-tego wypadku, i ma rozkład określony na liczbach naturalnych (bez zera).

O rozkładzie liczby szkód z jednego wypadku wiemy, że:
$\Pr(M_1 = 1) = p$, $\Pr(M_1 > 1) = 1 - p$.

Prawdopodobieństwo warunkowe iż w danym roku doszło jedynie do jednego wypadku pod warunkiem, iż wystąpiła więcej niż jedna szkoda:
$\Pr(K = 1 | N > 1)$

przy założeniach liczbowych: $\lambda = \frac{1}{5}$, $p = \frac{4}{5}$

wynosi z dobrym przybliżeniem:

(A) 0.65

(B) 0.53

(C) 0.37

(D) 0.22

(E) 0.18

Zadanie 6.
Ubezpieczeni są losowo dobrani z populacji, w której:

- łączna wartość szkód dla ubezpieczonego charakteryzującego się wartością λ parametru Λ ma złożony rozkład Poissona z oczekiwaną liczbą szkód N równą λ,
- rozkład wartości pojedynczej szkody jest taki sam dla wszystkich ubezpieczonych, a jego wartość oczekiwana wynosi μ,
- parametr Λ ma rozkład Gamma (2,4) o wartości oczekiwanej 1/2 i wariancji 1/8.

Ubezpieczyciel sprzedaje członkom tej populacji ubezpieczenie w zamian za składkę płatną z góry w wysokości:

- $120\% \cdot \mu \cdot \mathrm{E}(\Lambda | N > 0)$,

a na koniec roku tym ubezpieczonym, którzy nie zgłosili żadnej szkody, **wypłaca bonus** w wysokości:

- $120\% \cdot \mu \cdot \{\mathrm{E}(\Lambda | N > 0) - \mathrm{E}(\Lambda | N = 0)\}$.

Bonus wynosi:

(A) $\frac{7}{18}\mu$

(B) $\frac{5}{18}\mu$

(C) $\frac{5}{20}\mu$

(D) $\frac{3}{10}\mu$

(E) $\frac{1}{3}\mu$

Zadanie 7.

O rozkładzie zmiennej losowej X wiemy, że:

- $\Pr(X \in [0,10]) = 1$
- $E(X) = 2$
- $\Pr(X < 2) \leq \frac{1}{2}$

Przy tych założeniach o rozkładzie wariancja zmiennej X może przyjmować różne wartości. Kres górny zbioru tych wartości równy jest:

(A) 8

(B) 10

(C) 12

(D) 14

(E) 16

Zadanie 8.
Szkoda *Y* może przyjmować wartości ze skończonego zbioru liczb $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ takich, że $\min\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \geq 3$. Łączna wartość szkód w portfelu *W* równa się:

$$W = \sum_{i=1}^{n} N_i y_i \ ,$$

gdzie N_i to liczba szkód o wartości y_i.

Załóżmy, że $N_1, \dots, N_n$ to nawzajem niezależne zmienne losowe o rozkładach Poissona z wartościami oczekiwanymi odpowiednio $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wiemy, że:

- $E(W) = 600$,
- $VAR(W) = 7700$,
- $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 100$.

Jeżeli do każdej szkody zastosujemy udział własny ubezpieczonego w wysokości $d = 3$, to wariancja łącznej wartości szkód pozostałej na udziale ubezpieczyciela wyniesie:

(A) 4100

(B) 4300

(C) 4500

(D) 4750

(E) 5000

Zadanie 9.
Niech:
- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- $T_1, T_2, ..., T_N$ oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go,…, N-tego (numeracja roszczeń od 1-go do N-tego jest całkowicie przypadkowa, nie wynika więc z chronologii ich zgłaszania)

Załóżmy, że:
- zmienne losowe $N, T_1, T_2, T_3, ...$ są niezależne,
- zmienne losowe $T_1, T_2, T_3, ...$ mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1 (jednostką pomiaru czasu jest miesiąc)
- zmienna losowa N ma rozkład logarytmiczny dany wzorem:

$$\Pr(N = k) = \frac{1}{-\ln(1-c)} \frac{c^k}{k}, \quad k = 1,2,3,... \qquad \text{z parametrem } c \in (0,1).$$

Niech A oznacza zdarzenie, iż w ciągu pierwszych 2 miesięcy od zajścia wypadku zgłoszono dokładnie jedno roszczenie, a więc iż:
- dokładnie jedna liczba ze zbioru liczb $\{T_1, T_2, ..., T_N\}$, jest mniejsza lub równa 2.

Prawdopodobieństwo tego, że więcej roszczeń z tego wypadku już nie będzie, a więc:

$$\Pr(N = 1 | A)$$

wynosi:

(A) $\dfrac{c}{-\ln(1-ce^{-2})}$

(B) $\dfrac{ce^{-2}}{-\ln(1-ce^{-2})}$

(C) $1-ce^{-2}$

(D) $\dfrac{1}{1+ce^{-2}}$

(E) $\dfrac{ce^{-2}}{-\ln(1-c)}$

Zadanie 10.
Niech θ będzie dodatnią liczbą rzeczywistą.
Rozważmy parę zmiennych losowych T_θ i D, oznaczających odpowiednio:

- T_θ - moment czasu, w którym zaszła szkoda,
- D – czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do jej likwidacji.

Jednostką pomiaru czasu jest jeden rok.
Załóżmy, że T_θ oraz D są niezależne, przy czym:

- T_θ ma rozkład jednostajny na odcinku $(0,\theta)$
- D ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej jeden.

Sumę $(T_\theta + D)$ interpretujemy jako moment czasu, w którym zlikwidowano szkodę.

Warunkową wartość oczekiwaną $\mathrm{E}\left(D \middle| T_\theta + D > \theta\right)$ interpretujemy jako oczekiwany odstęp w czasie pomiędzy momentem zajścia a momentem likwidacji szkody, pod warunkiem iż szkoda, do której doszło na odcinku czasu $(0,\theta)$, do końca tego odcinka czasu zachowała status szkody niezlikwidowanej.

Granica:
$$\lim_{\theta\to\infty} \mathrm{E}\left(D \middle| T_\theta + D > \theta\right)$$
wynosi:

(A) rok

(B) 3/2 roku

(C) 5/3 roku

(D) dwa lata

(E) nieskończoność

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 grudnia 2008 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	D	
3	B	
4	A	
5	A	
6	E	
7	B	
8	E	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.