Zadanie 1.

Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową, o wartości oczekiwanej (μ_X, μ_Y), wariancji każdej ze współrzędnych równej σ^2 oraz kowariancji równej $\rho \cdot \sigma^2$. Staramy się obserwować niezależne realizacje tej zmiennej, ale nie w pełni to wychodzi - czasem udaje się zaobserwować jedynie pierwszą lub jedynie drugą ze współrzędnych. Przyjmijmy ważne założenie, iż do „zgubienia” obserwacji (całkowitego, jej pierwszej współrzędnej, lub jej drugiej współrzędnej) dochodzi całkowicie niezależnie od wartości tych obserwacji.
Załóżmy, iż otrzymaliśmy próbkę, zawierającą 10 obserwacji wyłącznie pierwszej współrzędnej, 40 obserwacji całej pary, oraz 10 obserwacji wyłącznie drugiej współrzędnej. Niech teraz:
$\overline{X}$ oznacza średnią z próbki (50-ciu) obserwacji na zmiennej *X*,
$\overline{Y}$ oznacza średnią z próbki (50-ciu) obserwacji na zmiennej *Y*,
$\overline{X-Y}$ oznacza średnią z próbki (40-tu) obserwacji na różnicy zmiennych $X-Y$;
oraz niech:
$(\overline{X}-\overline{Y})$ oraz $\overline{X-Y}$ oznaczają dwa alternatywne estymatory różnicy $(\mu_X - \mu_Y)$
Estymatory te mają jednakową wariancję o ile:

(A) $\rho = 0$

(B) $\rho = \frac{3}{9}$

(C) $\rho = \frac{4}{9}$

(D) $\rho = \frac{6}{9}$

(E) $\rho = \frac{5}{9}$

Zadanie 2.

Niech dwuwymiarowa zmienna losowa ma gęstość:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 2-x-y & dla \quad (x,y)\in(0,1)\times(0,1) \\ 0 & dla \quad (x,y)\notin(0,1)\times(0,1) \end{cases}$$

Niech $U=\min\{X,Y\}$ i $V=\max\{X,Y\}$.
Wtedy

(A) zmienne U i V są niezależne

(B) gęstość zmiennej (U,V) jest równa $g(u,v)=4-2u-2v$, gdy $0<u<v<1$

(C) gęstość zmiennej (U,V) jest równa $g(u,v)=(3-2v)(1{,}5-u)$, gdy $0<u<v<1$

(D) gęstość zmiennej V jest równa $h(v)=2-3v^2$, gdy $0<v<1$

(E) $EV=\frac{3}{4}$

Zadanie 3.

Na początku doświadczenia w urnie I znajdują się 3 kule białe, zaś w urnie II - 3 kule czarne. Losujemy po jednej kuli z każdej urny - po czym kulę wylosowaną z urny I wrzucamy do urny II, a tę wylosowaną z urny II wrzucamy do urny I. Czynność tę powtarzamy wielokrotnie. Granica (przy $n \to \infty$) prawdopodobieństwa, iż obie kule wylosowane w n-tym kroku są jednakowego koloru, wynosi:

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{2}{5}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{1}{4}$

Zadanie 4.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o identycznym rozkładzie jednostajnym na pewnym przedziale $(a,\ b)$, $a<b$. Współczynnik korelacji liniowej $Corr\left(\min_{i=1,\ldots n}\{X_i\},\ \max_{i=1,\ldots n}\{X_i\}\right)$ wynosi:

(A) 0

(B) $\frac{1}{n}$

(C) $\frac{2}{n+1}$

(D) $\frac{n+1}{n^2+1}$

(E) $\frac{1}{n^2}$

Zadanie 5.

Wiadomo, że liczby

0,38, 0,65, 0,72, 1,00

są niezależnymi realizacjami zmiennej losowej o rozkładzie jednostajnym o gęstości

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta} & dla \quad 0<x<\theta \\ 0 & w\ pozost.przyp,\end{cases}$$

gdzie $\theta>0$ jest nieznanym parametrem. Zakładamy, że parametr θ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale [0,5, 2].
Mediana rozkładu a posteriori, przy tych danych, jest równa

(A) 1,250

(B) 1

(C) 0,627

(D) 1,211

(E) 1,155

Zadanie 6.

Załóżmy, że dysponujemy pojedynczą obserwacją X z rozkładu $P \in \{P_0, P_1\}$, gdzie P_0 jest rozkładem normalnym $N(0,4)$ i P_1 jest rozkładem Laplace'a o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}|x|}.$$

Rozważmy zadanie testowania hipotezy

$$H_0 : P = P_0$$

przeciw alternatywie

$$H_1 : P = P_1.$$

Wiadomo, że w zbiorze liczb większych od 2, do obszaru krytycznego testu najmocniejszego należą liczby z przedziału $(3{,}8, +\infty)$. Moc tego testu jest równa

(A) 0,1371

(B) 0,2447

(C) 0,2036

(D) 0,1224

(E) 0,2036

Zadanie 7.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z tego samego rozkładu o dystrybuancie

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 1 - 3^{-(x-\theta)} & \text{gdy } x > \theta \\ 0 & \text{gdy } x \le \theta \end{cases}$$

gdzie $\theta \ge 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy jednostajnie najmocniejszy test hipotezy $H_0 : \theta = 0$ przy alternatywie $H_1 : \theta > 0$ na poziomie istotności 0,01.

W danym punkcie $\theta_1 > 0$ funkcja mocy tego testu przyjmuje wartości większe lub równe 0,81 wtedy i tylko wtedy, gdy liczebność próbki *n* spełnia warunek

(A) $n \ge \dfrac{4}{3\theta_1}$

(B) $n \ge \dfrac{\log_3 100}{\theta_1}$

(C) $n \ge \dfrac{4}{\theta_1}$

(D) $n \ge \dfrac{\theta_1}{\log_3 100}$

(E) $n \ge 4\theta_1$

Zadanie 8.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z tego samego rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej 1. Niech N będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej 1 niezależną od zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$. Niech

$$S_N = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}$$

Wtedy gęstość rozkładu zmiennej S_N w punkcie $s > 0$ jest równa

(A) $e^{-s-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!n!}$

(B) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-sn-1}}{n!}$

(C) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-sn-1}}{(n-1)!n!}$

(D) $e^{-s-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!n!}$

(E) żadna z powyższych odpowiedzi

Zadanie 9.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$, $n>2$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi z tego samego rozkładu geometrycznego, gdzie

$$P(X_i = k) = (k+1)p^2(1-p)^k \quad \text{gdy} \quad k = 0,1,2,\dots,$$

a $p \in (0,1)$ jest nieznanym parametrem.

Rozważamy klasę estymatorów parametru p postaci

$$\hat{p} = \frac{a}{a + \sum_{i=1}^{n} X_i} .$$

Dobierz parametr a tak, by otrzymać estymator nieobciążony.

A) $a = 2n$

(B) $a = 2n - 1$

(C) $a = n$

(D) $a = n + 0{,}5$

(E) $a = n - 1$

Zadanie 10.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_6$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie Weibulla o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{4}{\theta} x^3 \exp\left(-\frac{1}{\theta} x^4\right) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \le 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Niech $\hat{\theta}$ oznacza estymator największej wiarogodności parametru θ. Obliczyć

$$P_\theta\left(\left|\hat{\theta} - \theta\right| < 0{,}1\theta\right).$$

(A) 0,1915

(B) 0,2548

(C) 0,0604

(D) 0,1342

(E) 0,0589

Egzamin dla Aktuariuszy z 6 października 2008 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....
~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	B	
3	C	
4	B	
5	D	
6	B	
7	C	
8	A	
9	B	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.