

Zadanie 1. Obserwujemy działanie pewnego urządzenia w kolejnych chwilach $t = 0, 1, 2, \dots$. Działanie tego urządzenia zależy od pracy dwóch podzespołów A i B. Każdy z nich może ulec awarii w jednostce czasu z prawdopodobieństwem 0,1 niezależnie od drugiego. Jeżeli jeden z podzespołów ulega awarii, to urządzenie nie jest naprawiane i działa dalej wykorzystując drugi podzespół. Jeżeli oba podzespoły są niesprawne w chwili t , to następuje ich naprawa i w chwili $t+1$ oba są sprawne. Prawdopodobieństwo, że podzespół B jest sprawny w chwili t dąży, przy t dążącym do nieskończoności, do następującej liczby (z dokładnością do 0,001):

- (A) 0,635
- (B) 0,655
- (C) 0,345
- (D) 0,474
- (E) 0,602.

Zadanie 2. Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0, \end{cases}$$

gdzie $\alpha > 0$ jest ustalonym parametrem.

Niech N będzie zmienną losową, niezależną od $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, o rozkładzie ujemnym dwumianowym $P(N = n) = \binom{n+r-1}{n} p^r (1-p)^n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$, gdzie $r > 0$ i $p \in (0; 1)$ są ustalonymi parametrami. Niech

$$Z_N = \begin{cases} \min(X_1, X_2, \dots, X_N) & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0. \end{cases}$$

Oblicz $E(NZ_N)$ i $Var(NZ_N)$.

(A) $E(NZ_N) = \frac{1}{\alpha}$ i $Var(NZ_N) = \frac{1}{\alpha^2}$

(B) $E(NZ_N) = \frac{1-p^r}{\alpha}$ i $Var(NZ_N) = \frac{1-p^r}{\alpha^2}$

(C) $E(NZ_N) = \frac{1-p^r}{\alpha}$ i $Var(NZ_N) = \frac{1-p^{2r}}{\alpha^2}$

(D) $E(NZ_N) = \frac{r(1-p)}{p\alpha}$ i $Var(NZ_N) = \frac{r(1-p)}{p^2\alpha^2}$

(E) $E(NZ_N) = \frac{1-p^r}{\alpha}$ i $Var(NZ_N) = \frac{1-p^{2r}}{\alpha}$.

Zadanie 3. Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x} & \text{gdy } x > 0 \text{ i } y \in (0; 1) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech $Z = X + 2Y$. Wtedy łączny rozkład zmiennych Z, X jest taki, że

- (A) zmienne Z i X są niezależne;
- (B) jego funkcja gęstości na zbiorze $\{(z, x) : 0 < x < z < 2\}$ wyraża się wzorem $g(z, x) = \frac{1}{4} e^{-x}$;
- (C) $E(Z | X = 2) = 4$;
- (D) jego funkcja gęstości na zbiorze $\{(z, x) : 0 < x < z < 2 + x\}$ wyraża się wzorem $g(z, x) = \frac{1}{2} e^{-x}$;
- (E) jego funkcja gęstości na zbiorze $\{(z, x) : 0 < x < z < 1 + x\}$ wyraża się wzorem $g(z, x) = e^{-x}$.

Zadanie 4. Dysponujemy $N + 1$ ($N > 1$) identycznymi urnami. Każda z nich zawiera N kul białych i czarnych. Liczba kul białych w i -tej urnie jest równa $i - 1$, gdzie $i = 1, 2, \dots, N + 1$.

Losujemy urnę, a następnie ciągniemy z niej jedną kulę i okazuje się, że otrzymana kula jest biała. Oblicz prawdopodobieństwo, że ciągnąc drugą kulę z tej samej urny (bez zwracania pierwszej) również otrzymamy kulę białą.

(A) $\frac{N - 1}{2(N + 1)}$

(B) $\frac{N}{2(N + 1)}$

(C) $\frac{N - 1}{N + 1}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) $\frac{1}{2}$.

Wskazówka: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (N - 1)N = \frac{(N - 1)N(N + 1)}{3}$.

Zadanie 5. Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Weibulla o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} x \exp(-\frac{x^2}{\theta}) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0, \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy nieobciążony estymator parametru θ postaci $T_n = aY$, gdzie $Y = \min(X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2)$ i a jest odpowiednio dobraną stałą (być może zależną od liczebności próby n).

Badając zgodność estymatora T_n otrzymujemy

$$(A) \quad \forall \theta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta} \{ |T_n - \theta| > \varepsilon \} = 0;$$

$$(B) \quad \forall \theta > 0 \quad \forall 0 < \varepsilon < \theta \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta} \{ |T_n - \theta| > \varepsilon \} = 1 - \exp(-1) \left(\exp\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right) - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \right);$$

$$(C) \quad \forall \theta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta} \{ |T_n - \theta| > \varepsilon \} = 1 - \exp(-1) \left(\exp\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right) - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \right);$$

$$(D) \quad \forall \theta > 0 \quad \forall 0 < \varepsilon < \theta \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta} \{ |T_n - \theta| > \varepsilon \} = \exp\left(-1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right);$$

$$(E) \quad \forall \theta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta} \{ |T_n - \theta| > \varepsilon \} = 1.$$

Zadanie 6. Każda ze zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$ z nieznaną wartością oczekiwaną i znaną wariancją σ^2 . Założono, że zmienne są niezależne i wyznaczono (przy tych założeniach) test jednostajnie najmocniejszy dla testowania hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$ przy alternatywie $H_1 : \mu > \mu_0$ na poziomie istotności 0,05.

W rzeczywistości zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ mają łączny rozkład normalny, ale są skorelowane i współczynnik korelacji $\text{Corr}(X_i, X_j) = \frac{1}{10}$ dla wszystkich $i \neq j$.

Oblicz faktyczny błąd pierwszego rodzaju testu z dokładnością do 0,01.

- (A) 0,75
- (B) 0,25
- (C) 0,31
- (D) 0,69
- (E) 0,48

Zadanie 7. Niech X_1, X_2, X_3, X_4 będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienna losowa X_i ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej m i wariancji im^2 , $i=1,2,3,4$, gdzie $m \neq 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy estymatory parametru m postaci

$$\hat{m} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4.$$

Znaleźć współczynniki $a_i, i=1,2,3,4$, dla których estymator ma najmniejszy błąd średniokwadratowy, czyli współczynniki minimalizujące funkcję $E_m(\hat{m} - m)^2$

(A) $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{4}$

(B) $a_1 = \frac{12}{25}, a_2 = \frac{6}{25}, a_3 = \frac{4}{25}, a_4 = \frac{3}{25}$

(C) $a_1 = \frac{4}{10}, a_2 = \frac{3}{10}, a_3 = \frac{2}{10}, a_4 = \frac{1}{10}$

(D) $a_1 = \frac{4}{12}, a_2 = \frac{3}{12}, a_3 = \frac{2}{12}, a_4 = \frac{1}{12}$

(E) $a_1 = \frac{12}{37}, a_2 = \frac{6}{37}, a_3 = \frac{4}{37}, a_4 = \frac{3}{37}$

Zadanie 8. Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 0,5 i niech N będzie zmienną losową niezależną od $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną równą 3.

Niech

$$Y_i = \begin{cases} 0 & \text{gdy } X_i \leq d \\ X_i - d & \text{gdy } X_i > d, \end{cases}$$

gdzie d jest ustaloną liczbą dodatnią. Wyznaczyć funkcję tworzącą momenty zmiennej $Z = \sum_{i=1}^N Y_i$ w punkcie 1, a więc $E(e^Z)$.

(A) $e^{3(2e^{-2d}-1)}$

(B) $e^{3e^{-2d}}$

(C) e^3

(D) $(1 + e^{-2d})^3$

(E) $8e^{-6d}$.

Zadanie 9. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależne i mają jednakową wariancję σ^2 . Niech $U = 3X_1 + X_2 + \dots + X_n$ i $V = X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1} + 2X_n$. Wyznaczyć współczynnik korelacji między U i V .

(A) $\frac{1}{n+8}$

(B) $\sqrt{\frac{n+3}{n+8}}$

(C) $\frac{n+3}{\sqrt{(n+2)(n+1)}}$

(D) $\frac{n+3}{n+8}$

(E) $\frac{n+3}{(n+2)(n+1)}$.

Zadanie 10. Niech X_1, X_2, X_3, X_4 będzie próbą z rozkładu jednostajnego o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{gdy } x \in (0; \theta) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zakładamy, że nieznaną parametr θ jest zmienną losową o rozkładzie z funkcją gęstości daną wzorem

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \frac{4}{3} \theta^4 e^{-2\theta} & \text{gdy } \theta > 0 \\ 0 & \text{gdy } \theta \leq 0. \end{cases}$$

Hipotezę $H_0: \theta \leq 3$ przy alternatywie $H_1: \theta > 3$ odrzucamy dla tych wartości (x_1, x_2, x_3, x_4) , dla których prawdopodobieństwo a posteriori zbioru $\{\theta: \theta > 3\}$ jest większe niż $\frac{1}{2}$. Niech $x_{4:4} = \max(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Obszar krytyczny jest zbiorem postaci

- (A) $K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_{4:4} > 3\}$
- (B) $K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_{4:4} > 3\sqrt[4]{0,95}\}$
- (C) $K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_{4:4} > 3 - \frac{\ln 2}{2}\}$
- (D) $K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_{4:4} < \frac{3}{\sqrt[4]{2}}\}$
- (E) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

Egzamin dla Aktuariuszy z 11 października 2004 r.**Prawdopodobieństwo i statystyka****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko : KLUCZ ODPOWIEDZI

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	C	
3	D	
4	D	
5	B	
6	C	
7	E	
8	B	
9	B	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.