Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXVII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 24 stycznia 2023 r.

Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 120 minut

Uwagi

Wartości dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego N(0,1):

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0,01	0,503989	0,41	0,659097	0,81	0,79103	1,21	0,886861	1,61	0,946301	2,01	0,977784	2,41	0,992024
0,02	0,507978	0,42	0,662757	0,82	0,793892	1,22	0,888768	1,62	0,947384	2,02	0,978308	2,42	0,99224
0,03	0,511966	0,43	0,666402	0,83	0,796731	1,23	0,890651	1,63	0,948449	2,03	0,978822	2,43	0,992451
0,04	0,515953	0,44	0,670031	0,84	0,799546	1,24	0,892512	1,64	0,949497	2,04	0,979325	2,44	0,992656
0,05	0,519939	0,45	0,673645	0,85	0,802337	1,25	0,89435	1,65	0,950529	2,05	0,979818	2,45	0,992857
0,06	0,523922	0,46	0,677242	0,86	0,805105	1,26	0,896165	1,66	0,951543	2,06	0,980301	2,46	0,993053
0,07	0,527903	0,47	0,680822	0,87	0,80785	1,27	0,897958	1,67	0,95254	2,07	0,980774	2,47	0,993244
0,08	0,531881	0,48	0,684386	0,88	0,81057	1,28	0,899727	1,68	0,953521	2,08	0,981237	2,48	0,993431
0,09	0,535856	0,49	0,687933	0,89	0,813267	1,29	0,901475	1,69	0,954486	2,09	0,981691	2,49	0,993613
0,1	0,539828	0,5	0,691462	0,9	0,81594	1,3	0,9032	1,7	0,955435	2,1	0,982136	2,5	0,99379
0,11	0,543795	0,51	0,694974	0,91	0,818589	1,31	0,904902	1,71	0,956367	2,11	0,982571	2,51	0,993963
0,12	0,547758	0,52	0,698468	0,92	0,821214	1,32	0,906582	1,72	0,957284	2,12	0,982997	2,52	0,994132
0,13	0,551717	0,53	0,701944	0,93	0,823814	1,33	0,908241	1,73	0,958185	2,13	0,983414	2,53	0,994297
0,14	0,55567	0,54	0,705401	0,94	0,826391	1,34	0,909877	1,74	0,95907	2,14	0,983823	2,54	0,994457
0,15	0,559618	0,55	0,70884	0,95	0,828944	1,35	0,911492	1,75	0,959941	2,15	0,984222	2,55	0,994614
0,16	0,563559	0,56	0,71226	0,96	0,831472	1,36	0,913085	1,76	0,960796	2,16	0,984614	2,56	0,994766
0,17	0,567495	0,57	0,715661	0,97	0,833977	1,37	0,914657	1,77	0,961636	2,17	0,984997	2,57	0,994915
0,18	0,571424	0,58	0,719043	0,98	0,836457	1,38	0,916207	1,78	0,962462	2,18	0,985371	2,58	0,99506
0,19	0,575345	0,59	0,722405	0,99	0,838913	1,39	0,917736	1,79	0,963273	2,19	0,985738	2,59	0,995201
0,2	0,57926	0,6	0,725747	1	0,841345	1,4	0,919243	1,8	0,96407	2,2	0,986097	2,6	0,995339
0,21	0,583166	0,61	0,729069	1,01	0,843752	1,41	0,92073	1,81	0,964852	2,21	0,986447	2,61	0,995473
0,22	0,587064	0,62	0,732371	1,02	0,846136	1,42	0,922196	1,82	0,96562	2,22	0,986791	2,62	0,995604
0,23	0,590954	0,63	0,735653	1,03	0,848495	1,43	0,923641	1,83	0,966375	2,23	0,987126	2,63	0,995731
0,24	0,594835	0,64	0,738914	1,04	0,85083	1,44	0,925066	1,84	0,967116	2,24	0,987455	2,64	0,995855
0,25	0,598706	0,65	0,742154	1,05	0,853141	1,45	0,926471	1,85	0,967843	2,25	0,987776	2,65	0,995975
0,26	0,602568	0,66	0,745373	1,06	0,855428	1,46	0,927855	1,86	0,968557	2,26	0,988089	2,66	0,996093
0,27	0,60642	0,67	0,748571	1,07	0,85769	1,47	0,929219	1,87	0,969258	2,27	0,988396	2,67	0,996207
0,28	0,610261	0,68	0,751748	1,08	0,859929	1,48	0,930563	1,88	0,969946	2,28	0,988696	2,68	0,996319
0,29	0,614092	0,69	0,754903	1,09	0,862143	1,49	0,931888	1,89	0,970621	2,29	0,988989	2,69	0,996427
0,3	0,617911	0,7	0,758036	1,1	0,864334	1,5	0,933193	1,9	0,971283	2,3	0,989276	2,7	0,996533
0,31	0,62172	0,71	0,761148	1,11	0,8665	1,51	0,934478	1,91	0,971933	2,31	0,989556	2,71	0,996636
0,32	0,625516	0,72	0,764238	1,12	0,868643	1,52	0,935745	1,92	0,972571	2,32	0,98983	2,72	0,996736
0,33	0,6293	0,73	0,767305	1,13	0,870762	1,53	0,936992	1,93	0,973197	2,33	0,990097	2,73	0,996833
0,34	0,633072	0,74	0,77035	1,14	0,872857	1,54	0,93822	1,94	0,97381	2,34	0,990358	2,74	0,996928
0,35	0,636831	0,75	0,773373	1,15	0,874928	1,55	0,939429	1,95	0,974412	2,35	0,990613	2,75	0,99702
0,36	0,640576	0,76	0,776373	1,16	0,876976	1,56	0,94062	1,96	0,975002	2,36	0,990863	2,76	0,99711
0,37	0,644309	0,77	0,77935	1,17	0,879	1,57	0,941792	1,97	0,975581	2,37	0,991106	2,77	0,997197
0,38	0,648027	0,78	0,782305	1,18	0,881	1,58	0,942947	1,98	0,976148	2,38	0,991344	2,78	0,997282
0,39	0,651732	0,79	0,785236	1,19	0,882977	1,59	0,944083	1,99	0,976705	2,39	0,991576	2,79	0,997365
0,4	0,655422	0,8	0,788145	1,2	0,88493	1,6	0,945201	2	0,97725	2,4	0,991802	2,8	0,997445

Zadanie 1.

Dysponujemy następującymi danymi dla akcji spółki A. Dla historycznych okresów 1-5:

Okres	1	2	3	4	5
Stopa wolna od ryzyka	1%	1.5%	1%	1.5%	2%
Stopa zwrotu z akcji spółki A	5%	8%	2%	3.5%	6%

Dla przyszłego okresu 6:

Współczynnik beta dla akcji spółki A	1.25
Oczekiwana stopa zwrotu z portfela rynkowego na rynku, na którym handlowane są akcje spółki A	5%
Stopa wolna od ryzyka	2%

a) Zapisz równanie w modelu CAPM i wyjaśnij jego składowe, w szczególności wskaż w jaki sposób prognoza premii za ryzyko dla akcji uwzględnia ryzyko systematyczne i niesystematyczne, na jakie narażona jest akcja (2p),
b) Wyznacz premię za ryzyko dla akcji spółki A zgodnie z modelem CAPM (1p),
c) Wyznacz premię za ryzyko dla akcji spółki A w oparciu o historyczne obserwacje (1p),
d) Wyjaśnij różnicę pomiędzy *historical risk premium* i *expected risk premium.* Wskaż kiedy nie należy korzystać z historycznej premii za ryzyko do prognozy premii za ryzyko oczekiwanej w przyszłym okresie (1p).

Odpowiedzi:

a) Równanie, stanowiące podstawę modelu CAPM, dla kluczowych zmiennych losowych jest postaci:

$$R_a = r_f + \beta * (R_m - r_f) + \varepsilon,$$

gdzie R_a jest zmienną losową opisującą stopę zwrotu z akcji, R_m – zmienną losową opisującą stopę zwrotu z portfela rynkowego i jednocześnie zmienną losową opisującą ryzyko systematyczne, ε – niezależną zmienną losową opisującą ryzyko niesystematyczne dla akcji. Gdy policzymy wartość oczekiwaną, dostajemy:

$$E[R_a] - r_f = \beta * (E[R_m] - r_f).$$

Premia za ryzyko uwzględnia więc ryzyko systematyczne, ale nie uwzględnia ryzyka niesystematycznego, które, zgodnie z modelem CAPM, możemy zdywersyfikować.

b) Dostajemy: 1.25*(5%-2%) = 3.75 pp.

c) Stosując klasyczny estymator wartości oczekiwanej, dostajemy[1]:

$$\frac{5\%-1\%+8\%-1.5\%+2\%-1\%+3.5\%-1.5\%+6\%-2\%}{5} = 3.50\,pp.$$

d) Historyczna premia za ryzyko szacowana jest w oparciu o stopy zwrotu zaobserwowane w poprzednich okresach na rynku finansowym. Oczekiwana premia za ryzyko opisuje oczekiwania inwestorów co do przyszłych stóp zwrotu na rynku finansowym. Nie powinniśmy korzystać z historycznych premii za ryzyko, np. gdy wiemy, że sytuacja na rynku zmieni się w porównaniu do okresów przeszłych, np. w wyniku zmian strukturalnych na rynku.

Przykładowa literatura: Rozdział 5.2 w *"Financial Markets Theory: Equilibrium, Efficiency and Information", 2nd edition - E. Barucci, C. Fontana, Springer, 2017;* oraz Rozdział 14.2.3 w *"Financial Enterprise Risk Management", 2nd edition - P. Sweeting, Cambridge, 2017.*

[1] Osoby, które wyznaczały premie za ryzyko (ich realizacje) dla poszczególnych lat, także dostawały 1p (w oryginalnym arkuszu pojawiło się pytanie o „premie za ryzyko", a nie „premię za ryzyko", co mogło sugerować liczbę mnogą).

Zadanie 2.

- Wymień moduły ryzyka w Formule Standardowej w reżimie Wypłacalność II (1p),
- Dla dwóch wybranych modułów, opisz krótko dwa podmoduły ryzyka (4p).

Przykładowa literatura: *ROZPORZĄDZENIE DELEGOWANE KOMISJI (UE) 2015/35 z dnia 10 października 2014 r. uzupełniające dyrektywę Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II).*

Zadanie 3.

Rozważamy 5-letnie ubezpieczenie z funduszem inwestycyjnym ze składką jednorazową i gwarancją minimalnego świadczenia związanego z dożyciem końca trwania ubezpieczenia. Pomijamy w tym zadaniu świadczenie w wyniku zgonu. W momencie *t=0* ubezpieczony wpłaca składkę w wysokość 100 PLN i ubezpieczyciel pobiera opłatę w wysokości 100*x% PLN w celu zabezpieczenia gwarancji minimalnego świadczenia związanego z dożyciem. Składka w wysokości 100*(1-x%) PLN wpłacana jest na fundusz, którego dynamika opisana jest geometrycznym ruchem Browna zgodnie ze wzorem:

$$dS(t) = aS(t)dt + bS(t)dW(t),$$

gdzie $a = 10\%$, $b = 15\%$. Zwroty z funduszu determinują wartość rachunku w ubezpieczeniu. Na końcu każdego roku, z rachunku pobierana jest przez ubezpieczyciela opłata administracyjna w wysokości 1% wartości rachunku, która związana jest z kosztami prowadzenia rachunku. W momencie końca trwania umowy, jeżeli ubezpieczony przeżyje, ubezpieczyciel wypłaca ubezpieczonemu większą z wartości: wartość rachunku lub 105% składki wpłaconej na fundusz (składki po potrąceniu wstępnej opłaty). Prawdopodobieństwo śmiertelności wynosi 2% rocznie w całym okresie trwania ubezpieczenia, zgodnie z najlepszym oszacowaniem aktuariusza. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i stopa wolna od ryzyka wynosi 5% w okresie rocznym. Ryzyko śmiertelności jest niezależne od ryzyka finansowego i jest w pełni dywersyfikowalne w portfelu. Opcje kwotowane na rynku finansowym wyceniane są zgodnie z modelem Blacka-Scholesa. Na rynku finansowym dostępne są rachunek bankowy wolny od ryzyka, obligacje wolne od ryzyka o dowolnym terminie wykupu oraz fundusz. Nie ma ograniczeń w handlu na rynku finansowym.

a) Wyznacz wartość gwarancji w reżimie Wypłacalność II przy założeniu, że ubezpieczyciel pobiera opłatę w wysokości x=10%. Wyjaśnij swoje obliczenia odwołując się do zasad wyceny zobowiązań w reżimie Wypłacalność II (2p),
b) Wyznacz wartość x, przy której wartość gwarancji pokrywa się z pobraną opłatą (1p),
c) Zinterpretuj gwarancję jako instrument finansowy i zaproponuj strategię zabezpieczającą gwarancję, którą powinien zastosować ubezpieczyciel (w powyższym modelu w czasie ciągłym), w przypadku pobrania opłaty w wysokości ustalonej w punkcie b) (2p).

Wskazówka: wzór Blacka Scholesa dla opcji put:

$$Cena\ opcji\ put = -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT},$$
$$Delta\ opcji\ put = -N(-d_1),$$
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Odpowiedzi:

a) Załóżmy, że *S(0)=1*. Wtedy *S(T)* opisuje stopę zwrotu z funduszu w całym okresie trwania umowy. Wartość rachunku *F* w momencie *T* dana jest wzorem:

$$F(T) = F(0) * S(T) * (1-p)^T, \quad F(0) = Składka * (1-x),$$

gdzie *p* oznacza opłatę pobieraną z rachunku. Gwarancja ma postać:

$$\begin{aligned} H &= \mathrm{N} * \max(F(0) * (1+g) - F(T); 0) \\ &= \mathrm{N} * \max(F(0) * (1+g) - F(0) * S(T) * (1-p)^T, 0) \\ &= (1-x) * Składka * N * (1-p)^T * \max\left(\frac{1+g}{(1-p)^T} - S(T), 0\right), \end{aligned}$$

gdzie *g* oznacza gwarantowaną stopę zwrotu w całym okresie ubezpieczenia i N opisuje losową liczbę osób dożywających końca umowy.

Niech $\widehat{N}$ oznacza oczekiwaną liczbę osób dożywających końca trwania umowy. Ponieważ ryzyko śmiertelności jest niezależne od ryzyka finansowego i jest dywersyfikowalne w portfelu, możemy interpretować wypłatę z gwarancji jako wypłatę z $(1-x) * Składka * \widehat{N} * (1-p)^T$ jednostek opcji put na akcję *S* z terminem wykonania *T* i ceną wykonania: $(1+g)/(1-p)^T$.

Wykorzystując wzór Blacka-Scholesa, wartość 1 jednostki opcji put przy parametrach:

$$r = \log(1+0.05), \sigma = 0.15, \qquad T = 5, \qquad K = \frac{1+5\%}{(1-1\%)^5}, \qquad S(0) = 1,$$

jest równa 0.0680. Dla x=10%, wartość gwarancji wynosi $(1-10\%) * 100 * 0.98^5 * (1-1\%)^5 * 0.0680 = 5.2636$. Zgodnie z reżimem Wypłacalność II, wartość gwarancji jest równa cenie instrumentu, którego wypłata może być zreplikowana poprzez instrumenty dostępne na rynku.

b) Gwarancja może być sfinansowana z pobranej opłaty, jeżeli zachodzi warunek:

$$x * 100 = (1-x) * 100 * 0.98^5 * (1-1\%)^5 * 0.0680,$$

który oznacza, że pobrana opłata jest równa wartości gwarancji. Rozwiązując równanie, dostajemy x = 5.5253%.

c) Wiemy, że wypłata z opcji put może być replikowana strategią delta-hedgingową na rynku zupełnym typu Blacka-Scholesa. Rynek w naszym zadaniu jest zupełny ponieważ zakładamy, że ryzyko śmiertelności jest dywersyfikowalne. Liczba akcji funduszu *S*, którą powinien posiadać ubezpieczyciel w chwili $t \in [0, T]$ w portfelu replikującym, jest więc dana wzorem:

$$-N(-d_{1,t}) * (1-x) * Składka * \widehat{N} * (1-p)^T,$$

gdzie

$$d_{1,t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right).$$

Reszta środków powinna być zainwestowana w rachunek wolny od ryzyka. Z punktu b) wiemy, że pobrana opłata finansuje cenę początkową zakupu portfela replikującego.

<u>Przykładowa literatura:</u> Rozdziały 18.2 i 20.5 w *"Actuarial Finance – Derivatives, Quantitative Models and Risk Management" - M. Boudreault, J.F. Renaud, Wiley, 2019;* oraz art. 75-79 w *DYREKTYWA PARLAMENTU EUROPEJSKIEGO I RADY 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II).*

Zadanie 4.

Rozważamy uproszczony model wewnętrzny w reżimie Wypłacalność II, w którym rozważamy wyłącznie ryzyko rezerw pochodzące z poprzedniego roku szkodowego. Stosujemy model Incremental Loss Ratio, w którym inkrementalne wypłaty ($X_i,\ i = 1, \dots, n$), w kolejnych latach kalendarzowych *i,* opisane są wzorem: $X_i = E * Y_i$, gdzie $E = 100$ PLN oznacza składkę zarobioną w poprzednim roku szkodowym, $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ są niezależne oraz

Rok kalendarzowy i	μ_i	σ_i
1	0.40	0.1
2	0.20	0.05
3	0.10	0.03

Podane oszacowania (μ_i, σ_i^2) są oszacowaniami *best estimate* parametrów rozkładów szkód na początku pierwszego roku kalendarzowego. Zakładamy, że roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 0%.

a) Wyznacz wymóg kapitałowy na najbliższy rok kalendarzowy dla ryzyka rezerw w powyższym modelu wewnętrznym w reżimie Wypłacalność II zakładając, że aktuariusz nie zmieni oszacowań parametrów rozkładów szkód na koniec pierwszego roku. Zapisz i uzasadnij stratę, której ryzyko oceniasz, oraz miarę ryzyka, którą zastosujesz (2p),

b) O ile zmieni się wymóg kapitałowy wyznaczony w punkcie a), wyznacz nowy wymóg kapitałowy, jeżeli przyjmiemy założenie, że estymator μ_2 jest zmienną losową $\mu_2 \sim N(0.2, 0.02^2)$ skorelowaną z obserwacją Y_1 na poziomie 0.85 i (Y_1, μ_2) mają łączny rozkład normalny, co oznacza, że aktuariusz dokonuje rewizji oszacowań parametrów rozkładów szkód na koniec pierwszego roku w oparciu o szkody zaobserwowane w tymże roku (2p),

c) Rozważmy scenariusz: szkody wypłacone w najbliższym roku kalendarzowym wyniosły 50 PLN, wartość rezerw na przyszłe niewypłacone szkody na końcu roku wyniosła 40 PLN. Wyznacz zmianę środków własnych dla ryzyka rezerw (analizujemy zmianę najlepszego oszacowania szkody ostatecznej) w tym scenariuszu i zdekomponuj te zmiany na dwa efekty wskazane w punktach a) i b) (1p).

Wskazówka: Jeżeli (P, Q) mają łączny rozkład normalny to zachodzi

$$P = \mu_P + \rho \frac{\sigma_P}{\sigma_Q}(Q - \mu_Q) + \sqrt{(1-\rho^2)}\sigma_P \varepsilon,$$

gdzie $\varepsilon \sim N(0,1)$ i jest niezależne od Q.

Odpowiedzi:

a) Niech $Exp = 100$ oznacza składkę zarobioną. $(C_i, i = 0, \ldots, n)$ oznacza skumulowane wypłaty w latach kalendarzowych, gdzie C_0 oznacz płatności dokonane w poprzednich latach kalendarzowych. Stratę w najbliższym roku kalendarzowym definiujemy jako zmianę oszacowania szkody ostatecznej w horyzoncie jednego roku:

$$L_1 = E[C_n - C_0 | moment\ 1] - E[C_n - C_0 | moment\ 0]$$
$$= E[\textstyle\sum_{i=1}^{3} Exp * Y_i \,| moment\ 1] - E[\sum_{i=1}^{3} Exp * Y_i \,| moment\ 0],$$

gdzie $E[.|moment\ i]$ oznacza warunkową wartość oczekiwaną na moment *i* (informacja na moment *i* zawiera informację na temat wysokości wypłat do zakończenia *i*-tego roku kalendarzowego).

W sytuacji, gdy aktuariusz nie zmienia swoich oszacowań w oparciu o obserwację Y_1, dostajemy:

$$L_1 = Exp * (Y_1 - \mu_1) \sim N(0{,}100^2 * 0.1^2).$$

Wyznaczamy wymóg kapitałowy:

$$VaR_{0.995}(L_1) = 2.5758 * 100 * 0.1 = 25.7583.$$

b) W sytuacji, gdy aktuariusz zmienia swoje oszacowanie μ_2 w oparciu o obserwację Y_1, korzystamy z rozkładu warunkowego $\mu_2 | Y_1$ podanego we wskazówce. Wyznaczamy:

$$E[\textstyle\sum_{i=1}^{3} Exp * Y_i \,| moment\ 1] = E[\sum_{i=1}^{3} Exp * Y_i \,| Y_1]$$
$$= Exp * (Y_1 + E[Y_2|Y_1] + \mu_3) = Exp * (Y_1 + E[E[Y_2|Y_1, \mu_2]|Y_1] + \mu_3)$$
$$Exp * (Y_1 + E[\mu_2|Y_1] + \mu_3) =$$
$$= Exp * \left(Y_1 + 0.2 + 0.85 * \frac{0.02}{0.1}(Y_1 - 0.4) + 0.1\right)$$
$$\sim N(100 * (0.4 + 0.2 + 0.1), 100^2 * 0.1^2 * \left(1 + 0.85 * \frac{0.02}{0.1}\right)^2).$$

Wykorzystując definicję straty z punktu a), dostajemy:

$$L_1 \sim N(0{,}100^2 * 0.1170^2),$$
$$VaR_{0.995}(L_1) = 2.5758 * 100 * 0.1170 = 30.1372.$$

c) Wartość rezerwy na moment *i=0* wynosi 70. Oczekiwana wartość rezerwy na moment *i=1*, gdzie wartość oczekiwana liczona jest na moment *i=0*, wynosi 30. Oczekiwana płatność w najbliższym roku kalendarzowym wynosi 40.

Zgodnie z definicją z punktu a), strata w ciągu najbliższego roku wynosi 50+40-70=20, z czego 10 jest wynikiem nadwyżki zrealizowanych wypłaconych świadczeń w stosunku do oczekiwanych płatności, oraz kolejne 10 jest wynikiem zwiększenia rezerwy w momencie *i=1* w stosunku do oczekiwanej rezerwy.

<u>Przykładowa literatura:</u> *"Claims run-off uncertainty: the full picture" - M. Merz, M.V. Wüthrich, 2015.*

Zadanie 5.

Rozważamy wyłącznie ryzyko śmiertelności dla jednorodnego portfela ubezpieczeń na życie na koniec roku 2022. Portfel składa się ze 100 polis. Świadczenie w wyniku zgonu wynosi 10 PLN. Wartości świadczeń (przepływów) w kolejnych latach kalendarzowych zostały zaprognozowane w następujący sposób:

Rok kalendarzowy i	Najlepsze oszacowania świadczeń na koniec roku
2023	100 PLN
2024	60 PLN
2025	20 PLN

Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 0% - pomijamy więc dyskontowanie przepływów stopą wolną od ryzyka. Wymóg kapitałowy dla ryzyka śmiertelności w reżimie Wypłacalność II wyznaczamy zgodnie z podejściem scenariuszowym, w którym następuje trwały wzrost współczynników śmiertelności o 15%.

a) Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka śmiertelności w reżimie Wypłacalność II policzony na koniec 2022r. (2p),
b) Wyznacz wartość zobowiązania w reżimie Wypłacalność II na koniec 2022r., w tym wyznacz wartość najlepszego oszacowania i margines ryzyka przy koszcie kapitału równym 6%. Wyznaczając margines ryzyka, wyznacz bezpośrednio (bez stosowania aproksymacji) projekcje przyszłych wymogów kapitałowych (2p),
c) Wyznacz miarę EVA (*Economic Value Added*) w roku 2023, pomijając podatki i uwzględniając wyłącznie ryzyko śmiertelności, przy założeniu, że zmiana środków własnych (nadwyżka aktywów nad wartość zobowiązań w reżimie Wypłacalność II) w roku 2023 wyniosła +20 PLN oraz udziałowcy żądają stopy zwrotu 6% na zaangażowanych środkach równych wartości wymogu kapitałowego (1p).

Odpowiedzi:

a) Wyznaczamy:

Rok kalendarzowy i	Oczekiwana liczba zgonów w ciągu roku	Oczekiwana liczba osób na koniec roku	Prawdopodobieństwo *best estimate* zgonu w ciągu roku	Prawdopodobieństwo zgonu w ciągu roku po zastosowaniu szoku 15%
2023	10	90	$q_1 = 10.00\%$	$r_1 = 11.50\%$
2024	6	84	$q_3 = 6.67\%$	$r_2 = 7.67\%$
2025	2	82	$q_3 = 2.38\%$	$r_3 = 2.74\%$

Wyznaczając wymóg kapitałowy analizujemy zmianę wartości zobowiązań z pominięciem marginesu ryzyka. Niech Q_i oznacza wartość zobowiązania na początku roku kalendarzowego *i* przy prawdopodobieństwach *best-estimate*, R_i - oznacza wartość zobowiązania na początku roku kalendarzowego i przy prawdopodobieństwach po zastosowaniu szoku. Wymóg kapitałowy na rok kalendarzowy *i* obliczamy jako $SCR_i = R_i - Q_i$.

Wyznaczamy:

$$Q_1 = 10 * 100 * (q_1 + (1 - q_1) * q_2 + (1 - q_1) * (1 - q_2) * q_3) = 180,$$
$$R_1 = 10 * 100 * (r_1 + (1 - r_1) * r_2 + (1 - r_1) * (1 - r_2) * r_3) = 205.2243,$$
$$SCR_1 = 25.2243.$$

b) Wyznaczamy prognozy przyszłych wymogów kapitałowych:

$$Q_2 = 10 * 90 * (q_2 + (1 - q_2) * q_3) = 80,$$
$$R_2 = 10 * 90 * (r_2 + (1 - r_2) * r_3) = 91.7535,$$
$$SCR_2 = 11.7535.$$

$$Q_3 = 10 * 84 * q_3 = 20,$$
$$R_3 = 10 * 84 * r_3 = 23,$$
$$SCR_3 = 3.$$

Można zauważyć, w celu wykonania obliczeń szybciej, że Q jest sumą przyszłych najlepszych oszacowań świadczeń.

Margines ryzyka wynosi $6\% * (25.2243 + 11.7535 + 3) = 2.3986$. Wartość zobowiązania na koniec 2022 roku wynosi 180.00+2.3986.

c) EVA = 20-6%*25.2243 = 18.4865.

Przykładowa literatura: Art. 137 w *ROZPORZĄDZENIE DELEGOWANE KOMISJI (UE) 2015/35 z dnia 10 października 2014 r. uzupełniające dyrektywę Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II); "A review of the risk margin – Solvency II and beyond" - A. J. Pelkiewicz, S. W. Ahmed, P. Fulcher, K. L. Johnson, S. M. Reynolds, R. J. Schneider and A. J. Scott, British Actuarial Journal 25, s. 1-72, 2020; oraz "EVA/RAROC vs. MCEV Earnings: A Unification Approach", C. Kraus, The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice 38.*

Zadanie 6.

Rozważamy dwie linie biznesowe, w których wyznaczono jednoroczne oczekiwane zyski na poziomie 50 i 85 oraz jednoroczne wymogi kapitałowe na poziomie 150 i 210. Współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy jednorocznymi stratami w liniach wynosi 0.5. Wymogi kapitałowe dla poszczególnych linii biznesowych zostały wyznaczane zgodnie z metodą czynnikową, w której wymóg kapitałowy jest równy trzy razy odchylenie standardowej jednorocznej straty w linii biznesowej. Stosujemy metodę agregacji ryzyka z poziomu linii do poziomu spółki zgodnie z Formułą Standardową.

a) Wyznacz wymóg kapitałowy dla obu linii łącznie (zdywersyfikowany kapitał dla spółki) (1p),
b) Wyznacz alokacje Eulera zdywersyfikowanego kapitału dla spółki do linii biznesowych – wyprowadź wzór na alokację bezpośrednio z ogólnej definicji alokacji Eulera (2p),
c) Wyznacz miary RORAC dla spółki i linii biznesowych przy alokacji Eulera (1p),
d) Wskaż przewagę alokacji Eulera nad innymi metodami alokacji kapitału (1p).

Odpowiedzi:

a) Wyznaczamy zdywersyfikowany kapitał:

$$RC(L_1 + L_2) = \sqrt{(150)^2 + (210)^2 + 2 * 150 * 210 * 0.5} = 313.2092.$$

b) Zgodnie z alokacją Eulera, alokacja zdywersyfikowanego kapitału wyznaczonego zgodnie z miarą *RC* wyznaczana jest ze wzorem:

$$EC(L_1|L) = \frac{d}{dh} RC(L_1 + L_2 + hL_1)|_{h=0}.$$

Rozważmy miarę ryzyka *RC* równą odchyleniu standardowemu. Wyznaczamy:

$$RC(L_1 + L_2 + hL_1) = \sqrt{(1+h)^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2(1+h)\sigma_1\sigma_2\rho},$$
$$EC(L_1|L) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2\rho}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho}}.$$

Wyznaczamy alokacje do linii pierwszej i drugiej:

$$EC(L_1|L) = 3 * \frac{cov(L_1, L_1 + L_2)}{SD(L_1 + L_2)} = 3 * \frac{50^2 + 50 * 70 * 0.5}{\sqrt{50^2 + 70^2 + 2 * 50 * 70 * 0.5}} = 122.1229,$$
$$EC(L_2|L) = 3 * \frac{cov(L_2, L_1 + L_2)}{SD(L_1 + L_2)} = 3 * \frac{70^2 + 50 * 70 * 0.5}{\sqrt{50^2 + 70^2 + 2 * 50 * 70 * 0.5}} = 191.0863.$$

c) Wyznaczamy miary RAROC:

$$RORAC_{linia\ A} = \frac{50}{122.1229},$$
$$RORAC_{linia\ B} = \frac{85}{191.0863},$$
$$RORAC_{spółka} = \frac{135}{313.2092}.$$

d) Alokacja Eulera jest jedyną alokacją zgodna z miarą RORAC.

<u>Przykładowa literatura:</u> Rozdziały 8.4 i 8.5 *w "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015.*

Zadanie 7.

Struktura lokat w portfelu inwestycyjnym spółki ubezpieczeniowej na koniec roku 2022 jest następująca:

Lokaty	Wartość w PLN
Obligacje Skarbu Państwa	410
Obligacje korporacyjne	35
Akcje spółek notowanych na giełdzie	105
w tym akcje spółek notowanych na giełdach zagranicznych	60
Pozostałe	225

a) Dla każdej pozycji lokaty zdefiniuj jeden rodzaj ryzyka rynkowego, na które narażona jest spółka (2p),
b) Wymóg kapitałowy dla ryzyka rynkowego (systematycznego i niesystematycznego) dla akcji wynosi 100 PLN. Limit ryzyka dla akcji został ustalony na poziomie 80 PLN. Zaproponuj dwie potencjalne techniki redukcji ryzyka dla akcji (2p),
c) Wyjaśnij, czy ryzyko rynkowe dotyczy tylko aktywów, czy także może dotyczyć zobowiązań firmy ubezpieczeniowej (1p).

Odpowiedzi:

a) Przykładowe rodzaje ryzyka rynkowego dla lokat:

Lokaty	Ryzyko rynkowe
Obligacje Skarbu Państwa	Stopy procentowej
Obligacje korporacyjne	Spreadu kredytowego
Akcje spółek notowanych na giełdzie	Ceny akcji
w tym akcje spółek notowanych na giełdach zagranicznych	Kursu walutowego

b) Możemy np. sprzedać akcje, czyli zmniejszyć ekspozycję na ryzyko, lub zdywersyfikować ekspozycję, zmieniając skład portfela akcyjnego.

c) Ryzyko rynkowe może dotyczyć zobowiązań ubezpieczeniowych, np. ryzyko stopy procentowej.

<u>Przykładowa literatura</u>: *ROZPORZĄDZENIE DELEGOWANE KOMISJI (UE) 2015/35 z dnia 10 października 2014 r. uzupełniające dyrektywę Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II);* oraz Rozdziały 14 i 16.2 w *"Financial Enterprise Risk Management", 2nd edition - P. Sweeting, Cambridge, 2017.*

Zadanie 8.

Rozważamy model Mertona dla ryzyka kredytowego. Firmy A i B finansują swoją działalność emisją akcji i obligacji zero-kuponowych z terminem wykupu *T*. Zmiany wartości aktywów firmy A i B opisane są równaniami:

$$dV(t) = a_i V(t)dt + b_i V(t)dW_i(t), \quad i = A, B,$$

gdzie W_1, W_2 są ruchami Browna. Zapadalność długu następuje w ciągu najbliższego roku w chwili *T=1*. Stopa wolna od ryzyka (intensywność oprocentowania) wynosi 3% w ciągu całego najbliższego roku. Dodatkowo:

Firma *i*	A	B
Bieżąca wartość aktywów firmy *V(0)*	100 PLN	200 PLN
a	10%	5%
B	20%	15%
Nominalna wartość długu w momencie *T=1*	75 PLN	135 PLN

a) Wyprowadź i wyznacz rzeczywiste prawdopodobieństwo *defaultu* dla firmy A w ciągu roku (2p),
b) Zinterpretuj, w oparciu o wyprowadzony wzór w punkcie a), jak wyznaczone prawdopodobieństwo *defaultu* zależy od struktury finansowania działalności firmy, jak zmieni się prawdopodobieństwo *defaultu*, gdy zmieni się nominalna wartość długu przy stałej bieżącej wartości aktywów (1p),
c) Wyznacz rzeczywiste prawdopodobieństwo, że obie firmy zbankrutują w ciągu roku, przy założeniu, że scenariusze bankructwa dla firmy A i B są niezależne (1p),
d) W jaki sposób wprowadziłbyś zależności pomiędzy scenariuszami bankructwa dla firmy A i B w powyższym modelu? (1p).

<u>Wskazówka</u>: rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego jest proces $V(t) = e^{at-\frac{1}{2}b^2t+bW(t)}$, gdzie $W(t) \sim N(0,t)$.

Odpowiedzi:

a) Zgodnie z modelem Mertona, prawdopodobieństwo *defaultu* w okresie *[0,T]* wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$Pr(V(T) < K) = \Pr\left(V(0)e^{aT-\frac{1}{2}b^2T+bW(T)} < K\right)$$
$$= \Pr\left(W(T) < \frac{\log\left(\frac{K}{V(0)}\right) - aT + \frac{1}{2}b^2T}{b}\right.$$

$$= \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{K}{V(0)}\right) - aT + \frac{1}{2}b^2T}{b\sqrt{T}}\right),$$

gdzie K oznacza nominalną wartość długu w momencie T i Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego. Podstawiając wartości parametrów dla firmy A, otrzymujemy prawdopodobieństwo 3.30%

b) Można zauważyć, że prawdopodobieństwo *defaultu* jest rosnącą funkcją $\frac{K}{V(0)}$. W sytuacji, gdy zwiększy się wartość nominalna długu przy stałej bieżącej wartości aktywów (relacja długu do akcji), prawdopodobieństwo *defaultu* zwiększy się.

c) Stosując analogiczny wzór co w punkcie a), prawdopodobieństwo *defaultu* dla firmy B wynosi 0.20%. Zakładając niezależność scenariuszy bankructwa, dostajemy 0.01% jako prawdopodobieństwo, że obie firmy zbankrutują.

d) Możemy wprowadzić skorelowane ruchy Browna w dynamikach wartości aktywów firmy lub kopułę dla brzegowych prawdopodobieństw bankructwa.

<u>Przykładowa literatura:</u> Rozdziały 10.3, 10.4 i 14.5.3 w *"Financial Enterprise Risk Management", 2nd edition - P. Sweeting, Cambridge, 2017.*

Zadanie 9.

Firma ubezpieczeniowa posiada zobowiązanie w wysokości 300 w terminie zapadalności równym 8 lat. Struktura terminowa stóp procentowych wyznaczona jest w oparciu o dwie stopy w terminach zapadalności 5 i 10 lat w wysokości, odpowiednio, 3% i 5%. Stopy w pozostałych terminach zapadalności, pomiędzy 5 i 10 lat, definiowane są poprzez liniową aproksymację stóp z terminów zapadalności 5 i 10 lat. Przyjmujemy, że stopy są stopami spot oprocentowania ciągłego. Zmiany stóp w terminach 5 i 10 lat w okresie tygodnia modelowane są przy pomocy łącznego rozkładu normalnego $N(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\left(\frac{0.5}{100}\right)^2 & \frac{0.5}{100}*\frac{1}{100}*0.5\\ \frac{0.5}{100}*\frac{1}{100}*0.5 & \left(\frac{1}{100}\right)^2\end{bmatrix})$. Poniżej zaniedbujemy zmiany wartości zobowiązania związane ze skróceniem terminu zapadalności.

a) Stosując aproksymację Taylora pierwszego rzędu wyznacz zmianę wartości zobowiązania w wyniku spadku stóp procentowych w ciągu tygodnia w terminach 5 i 10 lat o 0.5 i 1 punktów procentowych. Porównaj aproksymację Taylora z dokładną zmianą wartości zobowiązania w tym scenariuszu (2p),
b) Stosując aproksymację Taylora pierwszego rzędu, wyznacz ryzyko zmiany wartości zobowiązania w horyzoncie jednego tygodnia związane ze zmianą wartości zobowiązania w wyniku zmian stóp procentowych. Jako miarę ryzyka zastosuj miarę Value-at-Risk na poziomie 99% (2p),
c) Stosując aproksymację Taylora pierwszego rzędu , wyznacz przykładowy *reverse stress scenario* dla stóp procentowych, który doprowadzi do przekroczenia wymogu wyznaczonego w punkcie b) (1p).

Odpowiedzi:

a) Stopę w chwili *t=8* wyznaczamy jako:

$$r_8 = a * r_5 + (1-a)r_{10},$$

gdzie r_5 i r_{10} oznaczają stopy w terminach 5 i 8 lat i $a = 2/5$.

Wartość zobowiązania dana jest wzorem $P(r_5, r_{10}) = 300 * e^{-8*r_8}$. Dostajemy:

$$P(3\%, 5\%) = 214.3869, \quad P(2.5\%, 4\%) = 228.5563.$$

Wzrost wartości zobowiązania wynosi 14.1693.

Stosując aproksymację Taylora pierwszego rzędu i podstawiając $h_5 = -0.5pp, h_{10} = -1pp$, dostajemy:

$$\begin{aligned} P(r_5 + h_5, r_{10} + h_{10}) - P(r_5, r_{10}) &= P_{r_5}(r_5, r_{10}) * h_5 + P_{r_{10}}(r_5, r_{10}) * h_{10} \\ &= -8 * P(r_5, r_{10}) * (a * h_5 + (1-a) * h_{10}) = 13.7208. \end{aligned}$$

b) Wiemy, że $a * h_5 + (1-a) * h_{10} \sim N(0, 0.0072^2)$. Wyznaczamy miarę ryzyka:

$$8 * 214.3869 * 0.0072 * \Phi^{-1}(0.99) = 28.7716.$$

c) Chcemy znaleźć scenariusz dla zmian stóp procentowych, przy którym:

$$-8 * P(r_5, r_{10}) * (a * h_5 + (1 - a) * h_{10}) > 28.7716,$$

Równoważnie:

$$\frac{2}{5} * h_5 + \frac{3}{5} * h_{10} < -1.6776.$$

Możemy zaproponować $h_5 < -1.5pp$ $h_{10} < -2pp$.

<u>Przykładowa literatura:</u> Rozdziały 20.3 I 20.4 w *"Actuarial Finance – Derivatives, Quantitative Models and Risk Management" - M. Boudreault, J.F. Renaud, Wiley, 2019;* oraz Rozdział 3.5.6 w *"Actuarial Aspects of ERM for Insurance Companies", 2016.*

Zadanie 10.

Firma posiada program reasekuracji działający w następującej kolejności:

1) Reasekuracja kwotowa, w ramach, której ubezpieczyciel odstępuje reasekuratorowi 50% szkód,
2) Reasekurację nadwyżki szkody 5MLN xs 1 MLN, z zachowkiem 1 mln PLN i górnym limitem odpowiedzialności reasekuratora 5 mln PLN. Reasekuracja stosowana jest do nadwyżki szkody liczonej w stosunku do każdego zdarzenia.

Pojawiły się dwie szkody: pierwsza w wysokości 4 mln i druga - 12 mln.

a) Wyznacz szkody netto, przy założeniu, że program reasekuracji nieproporcjonalnej nie posiada wznowień (2p),
b) Wyznacz szkody netto, przy założeniu, że program reasekuracji nieproporcjonalnej posiada jedno wznowienie (2p),
c) Wyjaśnij, czy reasekurator zamierzający podpisać nową umowę nadwyżki szkody (dla nowego ryzyka) jest narażony ryzyko negatywnej selekcji? W jaki sposób może ograniczyć ryzyko negatywnej selekcji tworząc umowę nadwyżki szkody (1p).

Odpowiedzi:

a) Obliczamy:

Szkoda	Reasekuracja kwotowa	Szkoda po reasekuracji kwotowej	Reasekuracja nadwyżki szkody	Szkoda netto
4 mln	2 mln	2 mln	1 mln	1 mln
12 mln	6 mln	6 mln	4 mln (ponieważ wykorzystano 1 mln przy pierwszej szkodzie)	2mln

b) Obliczamy:

Szkoda	Reasekuracja kwotowa	Szkoda po reasekuracji kwotowej	Reasekuracja nadwyżki szkody	Szkoda netto
4 mln	2 mln	2 mln	1 mln	1 mln
12 mln	6 mln	6 mln	5 mln (ponieważ limit został wznowiony po pierwszej szkodzie)	1 mln

c) Reasekurator może być narażony na ryzyko negatywnej selekcji ponieważ zazwyczaj ubezpieczyciel ceduje szkody najbardziej niebezpieczne, o których posiada najmniejszą informację o potencjalnych wysokościach szkód. W celu ograniczenia ryzyka negatywnej selekcji, reasekurator powinien wprowadzić limit odpowiedzialności w umowie reasekuracyjnej.

<u>Przykładowa literatura:</u> Rozdział 2 w *"Reinsurance: Actuarial and Statistical Aspects" - H. Albrecher, J. Beirlant, J. Teugels, Wiley,2017.*

Sesja egzaminacyjna w dniu 24 stycznia 2023 r.

Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń

Arkusz ocen

Zadanie nr	Punktacja
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	