

Zadanie 1.

Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie próbką prostą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, zaś:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

$$\text{gdzie: } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Interesuje nas względny błąd estymacji:

$$R = \frac{S^2 - \sigma^2}{\sigma^2}.$$

Przy $n = 10$ wartość oczekiwana $E(R^2)$ jest równa

- (A) 0.18
- (B) 0.19
- (C) 0.01
- (D) 0.20
- (E) 0.21

Zadanie 2.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 1.

Niech N będzie zmienną losową o rozkładzie ujemnym dwumianowym $\text{bin}^-\left(2, \frac{1}{e}\right)$

$$P(X_i = n) = \binom{n+1}{n} \left(\frac{1}{e}\right)^2 \left(\frac{e-1}{e}\right)^n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots,$$

niezależną od zmiennych $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$.

Niech

$$M_N = \begin{cases} \min\{X_1, X_2, \dots, X_N\} & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}$$

Wyznacz EM_N .

- (A) e^{-1}
- (B) $\frac{e-2}{e^2}$
- (C) $\frac{e-1}{e^2}$
- (D) e
- (E) $2(e-1)$

Zadanie 3.

W urnie znajduje się 40 kul, z których 25 jest białych i 15 czarnych. Losujemy bez zwracania najpierw 13 kul, a następnie z pozostałych kul w urnie losujemy bez zwracania 8 kul. Niech S_1 oznacza liczbę kul białych w pierwszym losowaniu, a S_2 liczbę kul białych w drugim losowaniu. Oblicz $\text{Cov}(S_1, S_2)$.

(A) 0

(B) $\frac{5}{8}$

(C) $-\frac{5}{8}$

(D) $-\frac{65}{72}$

(E) $\frac{65}{72}$

Zadanie 4.

Losujemy ze zwracaniem po jednej karcie do gry z talii 52 kart tak długo aż wylosujemy pika. Niech Y oznacza zmienną losową równą liczbie wyciągniętych kart, a X zmienną losową równą liczbie kart, w których uzyskaliśmy karo. Oblicz $E(Y | X = 4)$.

- (A) 10
- (B) 9
- (C) 12
- (D) 6
- (E) 7

Zadanie 5.

Założmy, że $X_1, \dots, X_n, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym i $EX_i = \frac{1}{\lambda}$. Niech $T_0 = 0$ i $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ dla $n = 1, 2, \dots$.

Niech Y będzie zmienną losową niezależną od zmiennych $X_1, \dots, X_n, \dots$, o rozkładzie gamma o gęstości

$$p(x) = \begin{cases} \beta^2 x \exp(-\beta x) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases},$$

gdzie $\beta > 0$ jest ustaloną liczbą.

Niech

$$N = \max\{n \geq 0 : T_n \leq Y\}.$$

Podaj rozkład prawdopodobieństwa zmiennej N .

$$(A) \quad P(N = n) = (n+1) \left(\frac{\beta}{\beta + \lambda} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{\beta + \lambda} \right)^n \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(B) \quad P(N = n) = (n+1) \left(\frac{\lambda}{\beta + \lambda} \right)^2 \left(\frac{\beta}{\beta + \lambda} \right)^n \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(C) \quad P(N = 0) = \left(\frac{\beta}{\beta + \lambda} \right)^2, \quad P(N = n) = \left(\frac{\lambda + 2\beta}{\lambda + \beta} \right) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \beta} \right)^2 \left(\frac{\beta}{\beta + \lambda} \right)^{n-1} \text{ dla } n = 1, 2, \dots$$

$$(D) \quad P(N = n) = \exp\left(-\frac{\lambda}{\beta}\right) \left(\frac{\lambda}{\beta} \right)^n \frac{1}{n!} \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(E) \quad P(N = n) = \exp\left(-\frac{\beta}{\lambda}\right) \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^n \frac{1}{n!} \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Zadanie 6.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$, gdzie $n > 1$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości

$$p_c(x) = \begin{cases} \frac{4c^4}{x^5} & \text{gdy } x > c \\ 0 & \text{gdy } x \leq c, \end{cases}$$

gdzie $c > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy dwa estymatory parametru c postaci $T_1 = a \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ i $T_2 = b\bar{X}$, gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ oraz a, b są dobrane tak, aby estymatory były nieobciążone. Wyznacz różnicę ryzyk estymatorów czyli

$$R = E(T_2 - c)^2 - E(T_1 - c)^2.$$

(A) $\frac{(n-1)^2 c^2}{2n(2n-1)}$

(B) $\frac{9(n-1)^2 c^2}{4n(2n-1)}$

(C) $\frac{(n-1)c^2}{4n(2n-1)}$

(D) $\frac{(n-1)c^2}{2n(2n-1)}$

(E) $\frac{(n^2-1)c^2}{2n(2n-1)}$

Zadanie 7.

Niech X będzie pojedynczą obserwacją z rozkładu o gęstości

$$p_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2}(\theta - |x|) & \text{gdy } x \in [-\theta, \theta] \\ 0 & \text{gdy } x \notin [-\theta, \theta] \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Weryfikujemy hipotezę $H_0: \theta = \theta_0$ przy alternatywie $H_1: \theta \neq \theta_0$ za pomocą testu opartego na ilorazie wiarygodności na poziomie istotności 0.2. Moc tego testu przy alternatywie $\theta = 4\theta_0$ jest równa

- (A) 0.80
- (B) 0.74
- (C) 0.65
- (D) 0.40
- (E) 0.37

Zadanie 8.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$, gdzie $n > 1$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Weibulla o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0, \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Zakładamy, że parametr θ ma rozkład a priori o gęstości

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} \exp(-\beta\theta) & \text{gdy } \theta > 0 \\ 0 & \text{gdy } \theta \leq 0 \end{cases}.$$

Wyznacz estymator bayesowski $\hat{\theta}$ parametru θ przy funkcji straty Esschera równej $L(\theta, \hat{\theta}) = e^{c\theta}(\theta - \hat{\theta})^2$, gdzie $c \neq 0$ jest ustaloną liczbą.

$$(A) \quad \frac{\beta + \sum_{i=1}^n X_i^2}{\alpha + n}$$

$$(B) \quad \frac{\alpha + n}{\beta + \sum_{i=1}^n X_i^2 - c}$$

$$(C) \quad \frac{\alpha + n}{\beta + \sum_{i=1}^n X_i^2}$$

$$(D) \quad \frac{\alpha + n}{\beta + \sum_{i=1}^n X_i^2 + c}$$

$$(E) \quad \frac{\beta + \sum_{i=1}^n X_i^2 - c}{\alpha + n}$$

Zadanie 9.

Zmienne losowe U i V są niezależne i mają rozkłady jednostajne na przedziale $(0,2)$. Niech $X = \max\{U, V\}$ i $Y = \min\{U, V\}$. Wtedy prawdziwe jest następujące stwierdzenie

- (A) $Cov(X, Y) = 0$
- (B) $P(X^2 + Y^2 < 4) = 0.5$
- (C) $P(X + Y \leq 2) = 0.75$
- (D) $P(X - Y \geq 1) = 0.5$
- (E) $Cov(X, Y) = \frac{1}{9}$

Zadanie 10.

Obserwujemy niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5$. Zmienne losowe X_1, X_2, X_3, X_4 mają ten sam rozkład o dystrybuancie F_{μ_1} , a zmienne losowe Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 mają ten sam rozkład o dystrybuancie F_{μ_2} . Dystrybuanta F_{μ} spełnia warunek

$$F_{\mu}(x) = F(x - \mu)$$

dla pewnej ustalonej, nieznanej, ciągłej, ściśle rosnącej dystrybuanty F . Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ przy alternatywie $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ stosując test o obszarze krytycznym

$$K = \{S : S \leq 13 \vee S \geq 27\},$$

gdzie S jest sumą rang zmiennych losowych X_1, X_2, X_3, X_4 w próbce złożonej ze wszystkich obserwacji ustawionych w ciąg rosnący. Wyznacz rozmiar testu.

(A) $\frac{8}{63}$

(B) $\frac{7}{63}$

(C) $\frac{6}{63}$

(D) $\frac{5}{63}$

(E) $\frac{4}{63}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 3 grudnia 2007 r.**Prawdopodobieństwo i statystyka****Arkusze odpowiedzi***

Imię i nazwisko :K L U C Z O D P O W I E D Z I.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	A	
3	C	
4	A	
5	A	
6	C	
7	C	
8	B	
9	E	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.