

Zadanie 1.

Niech zmienne losowe:

• $X_{t,k} = \mu + \alpha_k + \beta_t + \varepsilon_{t,k}$, $k = 1, 2, \dots, K$ oraz $t = 1, 2, \dots, T$,
oznaczają łączne wartości szkód odpowiednio dla k -tego kontraktu w t -tym roku.

O składnikach naszych zmiennych zakładamy, że:

- $\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_K, \beta_1, \dots, \beta_T$ to nieznanne, ale stałe (nielosowe) parametry, które spełniają następujące założenia normujące:
- $\alpha_1 + \dots + \alpha_K = 0$, $\beta_1 + \dots + \beta_T = 0$
- $\varepsilon_{t,k}$ jest jedynym losowym składnikiem zmiennej $X_{t,k}$,
- Wszystkie składniki losowe (dla $k = 1, 2, \dots, K$ oraz $t = 1, 2, \dots, T$) są niezależnymi zmiennymi losowymi o zerowej wartości oczekiwanej i takiej samej, nieznannej wariancji σ^2 .

Wnioskowanie o nieznanach parametrach modelu $\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_K, \beta_1, \dots, \beta_T, \sigma^2$ opieramy na następujących średnich z próbki:

- $\bar{X}_{..} = \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T X_{k,t}$,
- $\bar{X}_{k\bullet} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_{k,t}$, $k = 1, 2, \dots, K$,
- $\bar{X}_{\bullet t} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K X_{k,t}$, $t = 1, 2, \dots, T$,

oraz na sumach kwadratów odchyłeń z próbki:

- $S\varepsilon = \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T (X_{k,t} - \bar{X}_{k\bullet} - \bar{X}_{\bullet t} + \bar{X}_{..})^2$,
- $S\alpha = \sum_{k=1}^K (\bar{X}_{k\bullet} - \bar{X}_{..})^2$,
- $S\beta = \sum_{t=1}^T (\bar{X}_{\bullet t} - \bar{X}_{..})^2$

Wybierz zdanie prawidłowo określające związki między zmiennymi losowymi $S\alpha$, $S\beta$ oraz $S\varepsilon$.

- (A) Zależności występują dla każdej pary z trzech zmiennych $S\alpha$, $S\beta$ oraz $S\varepsilon$
- (B) $S\alpha$ oraz $S\beta$ są zależne, zaś $S\varepsilon$ jest niezależna od każdej z nich
- (C) Wszystkie trzy zmienne są niezależne
- (D) $S\varepsilon$ oraz $S\beta$ są zależne, zaś $S\alpha$ jest niezależna od każdej z nich
- (E) $S\alpha$ oraz $S\varepsilon$ są zależne, zaś $S\beta$ jest niezależna od każdej z nich

Zadanie 2.

Mamy dany ciąg liczb $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ z przedziału $(0,1)$. Rozważmy dwie zmienne losowe:

- Y o rozkładzie dwumianowym i parametrach (n, \bar{q}) , gdzie $\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i$
- Z , której warunkowy rozkład (przy danej wartości Q) jest rozkładem dwumianowym z parametrami (n, Q) , zaś zmienna Q ma rozkład n -punktowy taki, że $\Pr(Q = q_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$

Wariancje tych dwóch zmiennych związane są równością:

$$\text{var}(Z) = \text{var}(Y) + a \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2$$

Stała a występująca w tej równości wynosi:

- (A) n
- (B) $n - 1$
- (C) 1
- (D) $\frac{n-1}{n}$
- (E) $\frac{n-2}{n}$

Zadanie 3.

Pary zmiennych losowych (N_1, X_1) oraz (N_2, X_2) są niezależne, i oznaczają odpowiednio liczbę i wartość szkód dla dwóch ryzyk. Wartość szkód w obu przypadkach ma złożony rozkład Poisson z parametrami odpowiednio (λ_1, F_1) oraz (λ_2, F_2) . Oczekiwane liczby szkód λ_1, λ_2 , oraz dystrybuanty F_1, F_2 , dane są wzorami:

i	λ_i	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $x \in [1, 2)$	$F_i(x)$ dla $x \geq 2$
1	3	0	7/10	1
2	1	0	3/10	1

Wobec tego $E(N_1 + N_2 | X_1 + X_2 = 3)$ wynosi:

- (A) 18/8
- (B) 19/8
- (C) 20/8
- (D) 21/8
- (E) 22/8

Zadanie 4.

Łączna wartość szkód X ma złożony rozkład ujemny dwumianowy. Liczba szkód ma wartość oczekiwaną równą $1/2$ i wariancję równą $2/3$. Rozkład wartości pojedynczej szkody:

- ma na przedziale $(0, 5)$ gęstość daną wzorem $f(x) = 0.25 - 0.03x$,
- oraz w punkcie 5 masę prawdopodobieństwa równą 0.125.

Wariancja zmiennej X wynosi:

(A) $\frac{25 \times 13}{96}$

(B) $\frac{25 \times 15}{96}$

(C) $\frac{25 \times 17}{96}$

(D) $\frac{25 \times 19}{96}$

(E) $\frac{25 \times 21}{96}$

Zadanie 5.

Rozważamy zdyskontowaną na moment początkowy wartość składek pomniejszoną o wartość szkód w klasycznym procesie nadwyżki ubezpieczyciela:

$$B(t) = c \frac{1 - \exp(-\delta t)}{\delta} - \sum_{k: T_k \leq t} \exp(-\delta T_k) Y_k, \text{ gdzie:}$$

- ct jest sumą składek które napłynęły do momentu t ,
- T_k, Y_k to moment wystąpienia i wartość bieżąca k -tej szkody
- $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \dots$ są niezależne
- $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \dots$ mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 0.01
- Y_1, Y_2, Y_3, \dots mają rozkład o momentach równych: $E(Y_1) = 1$, $E(Y_1^2) = 3$
- $\delta = 6\%$ to zakładana przy dyskontowaniu intensywność oprocentowania

Dobierz stałą c tak, aby współczynnik zmienności (odchylenie standardowe podzielone przez wartość oczekiwaną) zmiennej:

$$B(\infty) = \frac{c}{\delta} - \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\delta T_k) Y_k$$

wyniósł 1/4.

- (A) 106
- (B) $100 + 4\sqrt{3}$
- (C) $100 + 6\sqrt{2}$
- (D) 112
- (E) $100 + 12\sqrt{2}$

Zadanie 6.

Kierowca, którego charakteryzuje wartość q parametru ryzyka Q , zgłasza szkody (jedną lub więcej) w ciągu roku z prawdopodobieństwem q , zaś nie zgłasza szkód z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$, przy czym zdarzenia te w kolejnych latach są zdarzeniami niezależnymi. Rozkład parametru ryzyka Q w populacji kierowców jest na przedziale $(0, 1)$ dany gęstością:

$$f_Q(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

Zakładamy, że populacja jest zamknięta (starzy kierowcy nie znikają, nowi się nie pojawiają). Kierowcy migrują pomiędzy klasami bardzo prostego, 4-klasowego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, łąduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Łąduje w klasie drugiej, o ile w danym roku był w klasie pierwszej;
- Łąduje w klasie trzeciej, o ile w danym roku był w klasie drugiej;
- Łąduje w klasie czwartej, o ile w danym roku był w klasie trzeciej lub czwartej.

Wiadomo, że rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni klas dla dowolnego kierowcy w takim systemie bonus-malus stabilizuje się (przestaje zależeć od klasy startowej) po upływie kilku pierwszych lat. Oznaczmy przez p_4 wartość oczekiwaną udziału kierowców przebywających w klasie czwartej w całkowitej liczebności kierowców w tej populacji, po osiągnięciu ww. stabilizacji.

Przyjmijmy, że parametry $(\alpha, \beta) = (2, 8)$. Wobec tego p_4 wynosi:

- (A) 22/55
- (B) 24/55
- (C) 26/55
- (D) 28/55
- (E) 30/55

Zadanie 7.

Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym:

$$U(t) = u + (c - du)t - S(t), \text{ gdzie:}$$

- $S(t)$ jest procesem o przyrostach i.i.d., o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną równą μt i wariancją $\sigma^2 t$,
- d to stopa dywidendy wypłacanej akcjonariuszom od kapitału początkowego u
- $(c - du)$ to intensywność napływu składki pomniejszonej o wypłacaną dywidendę

Podajemy równocześnie decyzję na temat pożądanego poziomu kapitału początkowego u oraz intensywności składki c . Wyznaczamy te parametry tak, aby zachować konkurencyjny (jak najniższy) poziom składki c , przy ograniczeniu, iż prawdopodobieństwo ruiny nie może przekroczyć z góry zadanego poziomu ψ .

Przy tych założeniach konkurencyjny poziom intensywności składki wyraża się wzorem:

$$c = \mu + a\sigma$$

Jeśli stopa dywidendy wynosi $d = 6\%$, a dopuszczalne prawdopodobieństwo ruiny $\psi = \exp(-3)$, to parametr a formuły składki przyjmie wartość:

- (A) $\frac{6}{10}$
- (B) $\frac{3\sqrt{2}}{10}$
- (C) $\frac{2\sqrt{3}}{10}$
- (D) $\frac{4}{10}$
- (E) $\frac{3}{10}$

Zadanie 8.

Ubezpieczyciel prowadzi dwa portfele ubezpieczeń. W każdym z portfeli pojedyncze ryzyko generuje szkody zgodnie ze złożonym procesem Poissona z taką samą intensywnością λ . Portfele różnią się rozkładem wartości pojedynczej szkody i liczbą ryzyk w portfelu (n_1 i n_2 odpowiednio). Stosunkowy narzut na składkę netto dla ryzyk w obu portfelach jest ten sam i wynosi θ . W rezultacie parametry modelu są następujące:

• 1 portfel:

intensywność łączna $n_1\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 2 \exp(-2y)$, składka za jedno ryzyko $(1 + \theta) \frac{\lambda}{2}$;

• 2 portfel:

intensywność łączna $n_2\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 5 \exp(-5y)$, składka za jedno ryzyko $(1 + \theta) \frac{\lambda}{5}$.

Jeśli wiemy, że funkcja prawdopodobieństwa ruiny ubezpieczyciela jest postaci:

$$\Psi(u) = \frac{2}{3} \exp(-u) + \frac{1}{12} \exp\left(-\frac{5}{2}u\right),$$

to wartości parametrów modelu $\left(\theta, \frac{n_1}{n_1 + n_2}\right)$ wynoszą:

(A) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{7}\right)$

(B) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{21}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{21}\right)$

(D) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{21}\right)$

(E) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{7}\right)$

Zadanie 9.

Niech N oznacza liczbę szkód zaszłych w ciągu roku z pewnego ubezpieczenia, z czego:

- M to liczba szkód zgłoszonych przed końcem tego roku,
- K to liczba szkód które zostaną zgłoszone w ciągu lat następnych,
- Zachodzi oczywiście $N = M + K$.

Liczba szkód zgłoszonych przed końcem roku:

- $M = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N$,

jest sumą składników, z których każdy przyjmuje wartość jeden gdy daną szkodę zgłoszono w ciągu roku, zaś zero, gdy zgłoszenie nastąpiło później. Przyjmujemy, że zmienne losowe N, Z_1, Z_2, Z_3, \dots są niezależne, oraz iż Z_1, Z_2, Z_3, \dots mają taki sam rozkład:

- $\Pr(Z_1 = 1) = 1/2, \quad \Pr(Z_1 = 0) = 1/2$.

Jeśli teraz założymy, że liczba szkód zaszłych w ciągu roku ma rozkład dwumianowy o postaci:

- $\Pr(N = n) = \binom{10}{n} \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{10-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 10$.

to warunkowa wartość oczekiwana $E(K|M = 0)$ wyniesie:

- (A) 1
- (B) 10/9
- (C) 4/3
- (D) 5/3
- (E) 2

Zadanie 10.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t ,
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t ,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości poszczególnych szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ ,
- wartości poszczególnych szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1
- $c = (1 + \theta) \cdot \lambda$, $\theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

$$L := \sup_{t > 0} \{u - U(t)\}$$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym:

$$L = l_1 + l_2 + \dots + l_N, \quad (L = 0 \text{ gdy } N = 0),$$

gdzie składnik l_1 jest zmienną określoną w przypadku, gdy nadwyżka spadnie poniżej u , i równy jest wtedy:

- $l_1 = u - U(t_1)$, gdzie t_1 jest tym momentem czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Jeśli $\theta = 1/5$, oraz $u = 3$, to warunkowa wartość oczekiwana liczby takich spadków, pod warunkiem że nastąpiła ruina:

$$E(N|L > u)$$

wynosi:

(A) 7

(B) $7\frac{1}{2}$

(C) 8

(D) $8\frac{1}{2}$

(E) 9

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 czerwca 2015 r.**Matematyka ubezpieczeń majątkowych****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko :KLUCZ ODPOWIEDZI.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	C	
2	B	
3	B	
4	E	
5	D	
6	E	
7	A	
8	C	
9	B	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.