

**Zadanie 1.**

Każde z ryzyk pochodzących z pewnej populacji charakteryzuje się tym, że przy danej wartości  $\lambda$  parametru ryzyka  $\Lambda$  rozkład wartości szkód z tego ryzyka jest złożonym rozkładem Poissona:

- z liczbą szkód  $N$  o wartości oczekiwanej  $\lambda$
- oraz rozkładem wartości pojedynczej szkody  $Y$  takim, że  $E(Y|\Lambda = \lambda) = a + b \cdot \lambda$ , gdzie  $a \geq 0$  oraz  $b > 0$ .

Założmy, że rozkład parametru ryzyka  $\Lambda$  w tej populacji jest rozkładem Gamma o gęstości danej na półosi dodatniej wzorem:

$$f_{\Lambda}(\lambda) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda)$$

Oczywiście można bez trudu wyznaczyć  $E(Y)$  jako  $E\{E(Y|\Lambda)\}$ . Rzecz w tym, że dużo bardziej interesująca jest inna wielkość, a mianowicie:

$$\bullet \quad \frac{E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N)}{E(N)},$$

gdzie  $N$  oznacza liczbę szkód, zaś  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$  ich łączną wartość z (losowo wybranego z populacji) ryzyka. Wielkość tę możemy interpretować jako wartość oczekiwaną pojedynczej szkody przypadkowo wylosowanej ze zbioru szkód, które obserwujemy dla pewnej dużej grupy ryzyk losowo wybranych z populacji.

$$\frac{E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N)}{E(N)} \text{ wynosi:}$$

$$(A) \quad a + b \frac{\alpha + 1}{\beta + 1}$$

$$(B) \quad a + b \frac{(\alpha + 1)^2}{\beta(\beta + 1)}$$

$$(C) \quad a + b \frac{\alpha + 1}{\beta}$$

$$(D) \quad a + b \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\beta^2}$$

$$(E) \quad a + b \frac{(\alpha + 1)^2}{\beta^2}$$

**Zadanie 2.**

Niech  $X_i$  oznacza wartość szkód z  $i$ -tego ryzyka, zaś  $W = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  łączną wartość szkód z portfela ryzyk. Rozważa się niekiedy następującą formułę składki  $\Pi(W)$  za portfel ryzyk  $W$ :

$$\bullet \quad \Pi(W) = \mu_W + \sigma_W \left\{ u_\varepsilon + \frac{u_\varepsilon^2 - 1}{6} \cdot \gamma_W \right\},$$

gdzie  $u_\varepsilon$  to kwantyl rzędu  $(1-\varepsilon)$  standaryzowanego rozkładu normalnego, zaś  $\mu_W, \sigma_W^2, \gamma_W$  to odpowiednio wartość oczekiwana, wariancja i współczynnik skośności zmiennej  $W$ .

Jeden ze sposobów wyceny indywidualnych ryzyk spójny z wyceną portfela opiera się na formule:

$$\bullet \quad \Pi(X_i) = \mu_i + a \cdot E\{(X_i - \mu_i)(W - \mu_W)\} + b \cdot E\{(X_i - \mu_i)(W - \mu_W)^2\},$$

gdzie  $\mu_i$  to wartość oczekiwana zmiennej  $X_i$ .

Dobierz stałe  $(a, b)$  tej formuły tak aby zapewnić iż suma składek indywidualnych  $\Pi(X_i)$  zrówna się ze składką za cały portfel  $\Pi(W)$ .

Przy założeniach że:

$$\bullet \quad u_\varepsilon = 2, \quad \sigma_W^2 = 10000;$$

stałe  $(a, b)$  wynoszą:

(A)  $a = 0.0002, \quad b = 0.005$

(B)  $a = 0.02, \quad b = 0.005$

(C)  $a = 0.02, \quad b = 0.00005$

(D)  $a = 0.0002, \quad b = 0.0000005$

(E)  $a = 0.02, \quad b = 0.0000005$

**Zadanie 3.**

W pewnym portfelu ubezpieczeń występuje tendencja do dłuższego czasu likwidacji dużych szkód niż szkód małych. Oto prosty model tego zjawiska:

$Y, D$  to wartość i czas opóźnienia likwidacji losowo wybranej szkody, przy czym rozkład bezwarunkowy zmiennej  $D$  określamy następująco:

- $D = 0$  jeśli szkodę likwiduje się w tym samym kwartale, kiedy do niej doszło,
- $D = 1$  jeśli szkodę likwiduje się w następnym kwartale,
- $D = 2$  jeśli szkodę likwiduje się jeszcze o kwartał później, itd.,

a zależność wartości szkody i opóźnienia wyraża założenie, że:

- $E(Y|D = k) = \mu \cdot (1 + w)^k$ .

Rozkład czasu likwidacji szkody w ujęciu ilościowym dany jest więc ciągiem:

- $r_k := \Pr(D = k)$ ,

zaś rozkład czasu likwidacji szkody w ujęciu wartościowym dany jest ciągiem:

- $rw_k := \frac{r_k E(Y|D = k)}{E(Y)}$

Założmy, że zachodzi:

- $r_k = \binom{k+2}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+3}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$
- oraz:  $w = \frac{1}{10}$ .

Wobec tego  $\frac{rw_3}{r_3}$  wynosi (w przybliżeniu)

- (A) 0.97
- (B) 0.98
- (C) 0.99
- (D) 1.00
- (E) 1.01

**Zadanie 4.**

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki z zerową nadwyżką początkową  $U(t) = ct - S_{N(t)}$ , gdzie:

- $ct$  jest sumą składek zgromadzonych do momentu  $t$ ,
- $N(t)$  jest procesem Poissona z parametrem intensywności  $\lambda$ ,
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  jest sumą wartości  $n$  pierwszych szkód
- wartości szkód  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  są i.i.d, niezależne od procesu  $N(t)$

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy tylko tyle, że:

- $\Pr(Y_1 \in [0, 1]) = 1$
- $E(Y_1) = 1/4$

Wobec tego wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny (pod warunkiem że do ruiny dojdzie) może przyjmować różne wartości. Przedział, który zawiera wszystkie te wartości (i nic ponadto) jest postaci:

(A)  $\left[ \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right]$

(B)  $\left[ \frac{1}{12}, \frac{1}{4} \right]$

(C)  $\left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]$

(D)  $\left[ \frac{1}{12}, \frac{1}{3} \right]$

(E)  $\left[ \frac{1}{8}, \frac{1}{2} \right]$

**Zadanie 5.**

Zmienna losowa:

$$X = Y_1 + \dots + Y_N$$

ma złożony rozkład Poissona o wartości oczekiwanej  $\lambda = 1$ . W tabeli poniżej podano rozkład prawdopodobieństwa składnika  $Y$ . W tejże tabeli podano także obliczone dla  $k = 0, 1, \dots, 4$  prawdopodobieństwa  $\Pr(X = k)$ .

| $k$ | $\Pr(Y = k)$ | $\Pr(X = k)$ |
|-----|--------------|--------------|
| 0   | 0            | 0.3679       |
| 1   | 0.2          | 0.0736       |
| 2   | 0.3          | 0.1177       |
| 3   | 0.2          | 0.0961       |
| 4   | 0.1          | 0.0703       |
| 5   | 0.2          |              |

Wobec tego  $\Pr(X = 5)$  z dobrym przybliżeniem wynosi:

- (A) 0.1068
- (B) 0.1079
- (C) 0.1090
- (D) 0.1101
- (E) 0.1112

**Zadanie 6.**

W pewnym ubezpieczeniu liczby szkód  $N_1, N_2, N_3, \dots$  które w kolejnych latach generuje ubezpieczony charakteryzujący się wartością  $q$  parametru ryzyka  $Q$  to niezależne zmienne losowe o identycznym rozkładzie dwumianowym z prawdopodobieństwem zajścia szkody w pojedynczym roku równym  $q$ .

Rozkład wartości parametru ryzyka  $Q$  w populacji ubezpieczonych dany jest na przedziale  $(0,1)$  gęstością:

$$\bullet \quad f_Q(q) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} q^{\alpha-1} (1-q)^{\beta-1},$$

z pewnymi nieznanymi dodatnimi parametrami  $(\alpha, \beta)$ .

Wiemy, że:

- prawdopodobieństwo  $p_0$  iż losowo wybrany ubezpieczony w ciągu jednego roku nie będzie miał szkody wynosi  $\frac{7}{10}$
- prawdopodobieństwo  $p_{0,0}$  iż losowo wybrany ubezpieczony w ciągu dwóch kolejnych lat nie będzie miał szkody wynosi  $\frac{1}{2}$ .

Wobec tego wartości parametrów  $(\alpha, \beta)$  wynoszą:

- (A)  $(\alpha, \beta) = (3, 7)$
- (B)  $(\alpha, \beta) = (6, 14)$
- (C)  $(\alpha, \beta) = (9, 21)$
- (D)  $(\alpha, \beta) = (12, 28)$
- (E)  $(\alpha, \beta) = (15, 35)$

**Zadanie 7.**

Dla dowolnej zmiennej losowej  $X$  o wartości oczekiwanej  $\mu$ , wariancji  $\sigma^2 < \infty$  oraz momencie centralnym  $\mu_{2k}$  rzędu  $2k$  zachodzą nierówności (typu Czebyszewa):

$$\Pr(X > \mu + t \cdot \sigma) < \frac{1}{t^{2k}} \cdot \frac{\mu_{2k}}{\sigma^{2k}}, \quad k=1,2,\dots, \quad t > 0.$$

Jeśli  $\mu_4 < \infty$ , wtedy istnieje taka liczba  $t^*$ , że:

- dla  $t < t^*$  ściślejsze ograniczenie na prawdopodobieństwo  $\Pr(X > \mu + t \cdot \sigma)$  otrzymujemy przyjmując  $k=1$ ,
- zaś dla  $t > t^*$  ściślejsze ograniczenie otrzymujemy przyjmując  $k=2$ .

Wiemy, że zmienna losowa  $X$  jest sumą dwóch niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach:

- z zerową wartością oczekiwaną, wariancją równą 4, oraz momentem centralnym czwartego rzędu równym  $5 \cdot 4^2$ .

Liczba  $t^*$  dla zmiennej losowej  $X$  wynosi:

- (A) 8
- (B) 6
- (C) 4
- (D) 2
- (E) 1

**Zadanie 8.**

Przyjmijmy, że  $N_p, N_{UD}, Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym:

- $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  mają identyczny rozkład taki, że:
- $\Pr(Y_1 \leq 0) = 0$
- $\forall x > 0 \quad \Pr(Y_1 \leq x) < 1$
- $N_{UD}$  ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami  $(r, q)$ :

$$\Pr(N_{UD} = k) = \binom{r+k-1}{k} (1-q)^r q^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Zaś  $N_p$  ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą  $r \frac{q}{1-q}$

Niech  $M_{UD}$  oznacza maksimum spośród  $N_{UD}$  pierwszych wyrazów ciągu  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ , a dokładniej:

$$M_{UD} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } N_{UD} = 0 \\ \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_{UD}}) & \text{gdy } N_{UD} > 0 \end{cases}$$

Zaś niech  $M_p$  oznacza odpowiednio maksimum spośród  $N_p$  pierwszych wyrazów ciągu  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ :

$$M_p = \begin{cases} 0 & \text{gdy } N_p = 0 \\ \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_p}) & \text{gdy } N_p > 0 \end{cases}$$

Wybierz zdanie, które poprawnie charakteryzuje relację rozkładów zmiennych losowych  $M_{UD}$  oraz  $M_p$ .

(A) Dla dowolnych  $r > 0$  oraz  $q \in (0,1)$  zachodzi:  $\forall_{x>0} \Pr(M_p < x) > \Pr(M_{UD} < x)$

(B) Dla dowolnych  $r > 0$  oraz  $q \in (0,1)$  zachodzi:  $\forall_{x>0} \Pr(M_p < x) < \Pr(M_{UD} < x)$

(C) Dla dowolnego  $r > 0$  można w przedziale  $(0,1)$  znaleźć zarówno takie  $q$ , że  $\forall_{x>0} \Pr(M_p < x) > \Pr(M_{UD} < x)$ , jak i takie  $q$ , że  $\forall_{x>0} \Pr(M_p < x) < \Pr(M_{UD} < x)$

(D) Dla dowolnych  $r > 0$  oraz  $q \in (0,1)$  istnieje takie  $x_0 > 0$ , że  $\forall_{x \in (0, x_0)} \Pr(M_p < x) > \Pr(M_{UD} < x)$ , oraz  $\forall_{x > x_0} \Pr(M_p < x) < \Pr(M_{UD} < x)$

(E) Dla dowolnych  $r > 0$  oraz  $q \in (0,1)$  istnieje takie  $x_0 > 0$ , że  $\forall_{x \in (0, x_0)} \Pr(M_p < x) < \Pr(M_{UD} < x)$ , oraz  $\forall_{x > x_0} \Pr(M_p < x) > \Pr(M_{UD} < x)$

**Zadanie 9.**

Dwa nieobciążone predyktory  $P_1$  i  $P_2$  parametru ryzyka  $\Theta$  mają błędy predykcji o wariancjach odpowiednio 9 i 4, a współczynnik korelacji liniowej tych błędów wynosi  $2/3$ . Wariancja błędu predykcji w klasie predyktorów  $P_3(z)$  zdefiniowanych następująco:

$$P_3(z) = zP_1 + (1-z)P_2, \quad z \in [0,1],$$

osiąga wartość najmniejszą, gdy współczynnik  $z$  jest równy:

- (A)  $4/13$
- (B)  $1/4$
- (C)  $2/9$
- (D)  $1/11$
- (E)  $0$

**Zadanie 10.**

W pewnym ubezpieczeniu szkody zgłaszane są w tym samym roku, w którym do nich doszło, bądź w roku następnym (opóźnienie nigdy nie jest większe). Niech  $N_{t,0}$

oznacza liczbę szkód zaszłych w roku  $t$  i zgłoszonych jeszcze w tym roku, zaś  $N_{t,1}$

liczbę szkód zaszłych w roku  $t$  i zgłoszonych w roku następnym.

Zakładamy, że wszystkie zmienne  $N_{1,0}, N_{1,1}, N_{2,0}, N_{2,1}, N_{3,0}, N_{3,1}, \dots$ , są niezależne,

przy czym zmienne:

- $N_{1,0}, N_{2,0}, N_{3,0}, \dots$  mają rozkład Poissona o wartości oczekiwanej  $\lambda r$ ,
- $N_{1,1}, N_{2,1}, N_{3,1}, \dots$  mają rozkład Poissona o wartości oczekiwanej  $\lambda(1-r)$

Na koniec roku  $t = 2$  mamy następujące obserwacje:

- $N_{1,0}, N_{1,1}, N_{2,0}$ .
- Przyjmujemy typowe założenie, że oba parametry  $(\lambda, r)$  są nieznane.

Estymator  $\hat{r}$  parametru  $r$  uzyskany metodą największej wiarygodności w oparciu o te dane wyraża się wzorem:

$$(A) \quad \hat{r} = \frac{N_{1,0} + N_{2,0}}{N_{1,0} + N_{2,0} + 2N_{1,1}}$$

$$(B) \quad \hat{r} = \frac{N_{1,0} + N_{2,0}}{N_{1,0} + N_{2,0} + N_{1,1}}$$

$$(C) \quad \hat{r} = \frac{N_{1,0}}{N_{1,0} + N_{1,1}}$$

$$(D) \quad \hat{r} = \frac{2N_{1,0} + N_{2,0}}{2N_{1,0} + N_{2,0} + 3N_{1,1}}$$

$$(E) \quad \hat{r} = \frac{2N_{1,0} + N_{2,0}}{2N_{1,0} + N_{2,0} + 2N_{1,1}}$$

**Egzamin dla Aktuariuszy z 3 grudnia 2007 r.****Matematyka ubezpieczeń majątkowych****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko ..... KLUCZ ODPOWIEDZI.....

Pesel .....

| Zadanie nr | Odpowiedź | Punktacja ♦ |
|------------|-----------|-------------|
| 1          | C         |             |
| 2          | C         |             |
| 3          | A         |             |
| 4          | E         |             |
| 5          | B         |             |
| 6          | B         |             |
| 7          | D         |             |
| 8          | B         |             |
| 9          | E         |             |
| 10         | A         |             |
|            |           |             |

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.