

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

XLIV Egzamin dla Aktuariuszy z 3 grudnia 2007 r.

Część II

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 3 grudnia 2007 r.

1. Rozważmy populację w której śmiertelnością rządzi prawo Weibulla:

$$\mu_x = kx \quad \text{gdzie } k > 0.$$

Niech x_{max} oznacza wiek największej śmiertelności tzn. wiek w którym gęstość rozkładu trwania życia noworodka wziętego z tej populacji ma maksymalną wartość.

Wówczas

$$\frac{e_0}{x_{max}}$$

wynosi (wskaż najbliższą wartość):

- (A) 1,15331 (B) 1,20331 (C) 1,25331 (D) 1,30331
(E) 1,35331

2. Rozważamy ubezpieczenie rosnące ciągle dla (x) . Wypłaci ono uposażonym sumę ubezpieczenia t w chwili śmierci ubezpieczonego, jeśli nastąpi ona w wieku $x + t$. Ubezpieczony opłaca składki za pomocą ciągłej renty życiowej składek $\pi(t)$ rosnących według wzoru:

$$\pi(t) = \bar{P}(x)t$$

(tak więc intensywność płaconej składki wzrasta liniowo o $\bar{P}(x)$ w skali roku).

Funkcja $\bar{P}(x)$ spełnia równanie różniczkowe

(A) $\frac{d}{dx} \bar{P}(x) = (\bar{P}(x) + \delta)(\bar{P}(x) - \bar{P}(\bar{A}_x))$

(B) $\frac{d}{dx} \bar{P}(x) = (\bar{P}(x) + \delta)(\bar{P}(x) - \bar{A}_x)$

(C) $\frac{d}{dx} \bar{P}(x) = (\bar{P}(x) + \delta)(\bar{P}(x) - \bar{a}_x)$

(D) $\frac{d}{dx} \bar{P}(x) = (\bar{P}(x) + \delta)(\bar{P}(\bar{A}_x) \bar{P}(x) - 1)$

(E) Żaden z powyższych wzorów nie jest prawdziwy.

3. (65) wybrany z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 100$ rozważa zakup za jednorazową składkę netto $S/N = 100000$ jednej z następujących polis emerytalnych:

- PE1 jest zwykłą indywidualną rentą dożywotnią ciągle płacącą ze stałą intensywnością $E1$ rocznie aż do śmierci,
- PE2 polega na wypłacaniu renty dożywotniej ciąglej ze zmienną intensywnością daną wzorem:

$$\pi(t) = \frac{\bar{V}(t)}{e_{65+t}} \quad \text{dla } 0 \leq t < 35;$$

i dodatkowej wypłacie uposażonym rezerwy $\bar{V}(t)$, gdy ubezpieczony umrze w wieku $65 + t$.

Dane jest $\delta = 0,03$. Wówczas

$$\frac{E1}{\pi(10)}$$

wynosi (wskaż najbliższą wartość):

- | | | | | | | | |
|-----|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|
| (A) | 1,330 | (B) | 1,380 | (C) | 1,430 | (D) | 1,480 |
| (E) | 1,530 | | | | | | |

4. Rozpatrujemy bezterminowe ubezpieczenie na życie dla (35), które wypłaci uposażonym 100000 zł na koniec roku śmierci. Ubezpieczony płaci składki w postaci renty dożywotniej w wysokości P na początku każdego roku. Dane są:

$$i = 4\%,$$

$$q_{55} = 0,01562 \quad , \quad q_{56} = 0,01692$$

$$\pi_{20}^r = 1030,48 \quad , \quad \pi_{21}^r = 1089,05 \quad .$$

Oblicz P . Wskaż najbliższą wartość.

- | | | | | | | | |
|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|
| (A) | 1438 | (B) | 1488 | (C) | 1538 | (D) | 1588 |
| (E) | 1638 | | | | | | |

5. (x) należy do populacji wykładniczej z $\mu_{x+t} \equiv 0,01$ i zaciągnął kredyt w wysokości $K = 400000$. Będzie go spłacał przez najbliższe $n = 30$ lat w formie renty ciągłej 30-letniej o odpowiednio dobranej stałej intensywności rocznej R . Intensywność oprocentowania kredytu jest stała w czasie i wynosi $0,04$. Nasz kredytobiorca musi ubezpieczyć ryzyko niespłacenia kredytu z powodu przedwczesnej śmierci (tzn. śmierci przed osiągnięciem wieku $x + 30$). Będzie płacił składki za to ubezpieczenie w formie renty życiowej ciągłej 30-letniej z intensywnością netto daną wzorem:

$$\pi(t) = a - bt \quad \text{dla } t \in [0,30]$$

przy czym a i b są tak dobrane, że dla każdego $t \in [0,30]$ zachodzą nierówności:

$$\pi(t) \geq 0 \text{ oraz } V(t) \geq 0$$

gdzie $V(t)$ oznacza rezerwę składek netto po t latach. Techniczna intensywność oprocentowania używana do kalkulacji składki i rezerw wynosi $\delta = 0,04$.

Oblicz a . Wskaż najbliższą wartość.

- | | | | | | | | |
|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|
| (A) | 4190 | (B) | 4290 | (C) | 4390 | (D) | 4490 |
| (E) | 4590 | | | | | | |

6. Rozważamy 25-letnie ubezpieczenie rentowe, w którym śmierć ubezpieczonego (40) odwraca kierunek płatności. Płatności przypadają na początek kolejnego roku ubezpieczenia; gdy są składką, mają wysokość P , a gdy rentą pośmiertną, mają wysokość 10 000. Po zawarciu umowy ubezpieczenie jest nieodwołalne i składki są płacone z konta depozytowego.

W momencie wystawienia polisy ubezpieczyciel ustala sobie plan rezerw na cały okres ubezpieczenia. Podaj wysokość rezerwy netto liczonej z 10-letnim wyprzedzeniem. Dane są: $v=0,95$

$D_{40}= 120\ 720$	$D_{50}= 67\ 525$	$D_{65}= 23\ 065$
$N_{40}=1\ 818\ 855$	$N_{50}=872\ 015$	$N_{65}= 210\ 865$
$l_{40}= 939\ 370$	$l_{50}= 877\ 590$	$l_{65}= 47\ 010$

Wskaż najbliższą wartość.

- | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| (A) 7 900 | (B) 8 000 | (C) 8 100 | (D) 8 200 |
| (E) 8 300 | | | |

7. Rozpatrujemy bezterminowe ubezpieczenie na życie wypłacające 10 000 zł na koniec roku śmierci. Składka jest płacona na początku roku, w stałej wysokości, przez cały okres ubezpieczenia.

Ubezpieczyciel poniósł koszty początkowe oraz ponosi na początku każdego roku ubezpieczenia stałą kwotę kosztów administracyjnych. W pierwszym roku bieżące płatności z tytułu obydwu kosztów przekroczyły o 500 zł poziom składki brutto.

Wiadomo, że na moment wystawienia polisy strumień kosztów administracyjnych jest równoważny kosztowi początkowemu.

Wyznacz udział narzutu na koszty w składce brutto, jeśli dane są:

$$i = 4\%$$

$$\ddot{a}_x = 11,48$$

Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 27,6% (B) 27,9% (C) 28,2% (D) 28,5%
(E) 28,8%

8. Pracodawca rekrutuje pracowników na 10-letni okres: 2 lata próbnego zatrudnienia, potem 8 lat zatrudnienia na stałe. W momencie zatrudnienia zakupuje wszystkim pracownikom ubezpieczenie, wypłacające – ale tylko pracownikom, którzy osiągnęli stałe zatrudnienie – świadczenie za śmierć w okresie zatrudnienia w wysokości 100 000 lub 10 000 z tytułu zwolnienia. Świadczenia są płatne w momencie zdarzenia.

Dane na temat ubytków w okresie próbnym pochodzą z tablic niezależnych ubytków. Średnia (centralna) stopa zwolnień wynosi $m^{(w)} = 0,06$ rocznie, a intensywność śmiertelności $\mu^{(s)} = 0,025$. Zwolnienia mają jednostajny rozkład w ciągu roku.

Dane dla okresu stałego zatrudnienia uwzględniają wykluczanie się ubytków.

Intensywność zwolnień jest stała i wynosi $\mu^{(w)} = 0,03$, a intensywność śmiertelności $\mu^{(d)} = 0,02$.

Podaj jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie dla $\delta = 0,05$. Wskaż najbliższą wartość.

- | | | | | | | | |
|-----|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|
| (A) | 9 480 | (B) | 9 530 | (C) | 9 580 | (D) | 9 620 |
| (E) | 9 670 | | | | | | |

9. Trzej bracia, po śmierci ojca, korzystają z wykupionej za jednorazową składkę polisy posagowej, wypłacającej rentę ciągłą z intensywnością 1000 zł na rok.

Polisa wypłaca w danym momencie rentę tylko jednemu z nich, temu który:

- jest najstarszy, spośród uprawnionych braci, ale nie przekroczył 20 lat,
- w chwili gdy uprawnienie przechodzi na niego ma wiek $[6 ; 15)$ lat.

Wpłaty mogą być zawieszane do czasu nabycia uprawnień przez kolejną osobę.

Obecnie bracia są w wieku ($x=17$), ($y=7$) oraz ($z=3$) i rentę uzyskuje (x). Wyznacz obecną wysokość rezerwy netto związanej z ewentualnymi wypłatami dla (z).

Bracia pochodzą z populacji o z wykładniczym rozkładem trwania życia z parametrem $\mu = 0,02$, a techniczne oprocentowanie wynosi $\delta = 0,03$. Wskaż najbliższą wartość.

- | | | | | | | | |
|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|
| (A) | 1345 | (B) | 1385 | (C) | 1425 | (D) | 1465 |
| (E) | 1505 | | | | | | |

10. Plan emerytalny składa się z części (1) typu *contribution-defined* oraz z części (2) *benefit-defined*. W pierwszej części płacona jest składka w wysokości 8% wynagrodzenia. Druga część dopełnia łączną emeryturę do 60% płacy finalnej, czyli płacy z ostatniego roku zatrudnienia.

Rozważ 40-letniego uczestnika planu (urodzonego 1 stycznia) z płacą rosnącą o 4% na

początku każdego roku i wynoszącą obecnie (po tegorocznej podwyżce) 40 000 zł oraz z

kapitałem w planie (1) w wysokości 50 000. Przyjmij, że składka jest płacona raz w roku,

w połowie roku. Zakładając przejście na emeryturę w wieku 65 lat, podaj udział emerytury

z pierwszej części planu w całej emeryturze. Dane jest oprocentowanie techniczne

$$i = 4\% \quad \text{oraz} \quad \ddot{a}_{65}^{(12)} = 11,43.$$

Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 48,4% (B) 48,7% (C) 49,0% (D) 49,3%
(E) 49,6%

XLIV Egzamin dla Aktuariuszy z 3 grudnia 2007 r.**Matematyka ubezpieczeń życiowych****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko :Klucz odpowiedzi.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	C	
2	A	
3	C	
4	B	
5	E	
6	C	
7	B	
8	E	
9	A	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.