Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXVII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 20 listopada 2017r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Kierowca, którego charakteryzuje wartość q parametru ryzyka Q, zgłasza szkody (jedną lub więcej) w ciągu roku z prawdopodobieństwem q, zaś nie zgłasza szkód z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$, przy czym zdarzenia te w kolejnych latach są zdarzeniami niezależnymi. Jeśli kierowcę z tej populacji przypadkowo wylosujemy, to charakteryzującą go wartość parametru q traktujemy jako realizację zmiennej losowej Q. Populacja jest niejednorodna, w związku z czym $var(Q) > 0$.
Zakładamy, że populacja jest zamknięta (starzy kierowcy nie znikają, nowi się nie pojawiają). Kierowcy migrują pomiędzy klasami bardzo prostego, 3-klasowego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, ląduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Ląduje w klasie drugiej, o ile w danym roku był w klasie pierwszej;
- Ląduje w klasie trzeciej, o ile w danym roku był w klasie drugiej lub trzeciej.

Na podstawie obserwacji ustaliliśmy, że frakcja kierowców z tej populacji przebywających w klasie pierwszej wynosi 20/80, w klasie drugiej 9/80, zaś w klasie trzeciej 51/80. Oczywiście pominęliśmy przy tym obserwacje z pierwszych paru lat funkcjonowania systemu bonus-malus, kiedy przynależność do klasy zależała jeszcze od klasy startowej.
Wobec tego $var(Q)$ wynosi:

(A) 2/80

(B) 3/80

(C) 4/80

(D) 5/80

(E) 6/80

Zadanie 2.

Rozważamy model nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:
$U_n = u + X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa (nieujemna);
- $X_1, X_2, X_3, \ldots$ są i.i.d, i reprezentują różnice pomiędzy wpływami ze składki a wydatkami na odszkodowania w kolejnych latach.

Zmienna X_1 ma rozkład geometryczny przesunięty:

$$\Pr(X_1 = -1) = 1 - q,$$
$$\Pr(X_1 = 0) = (1 - q)q,$$
$$\Pr(X_1 = 1) = (1 - q)q^2,$$
$$\Pr(X_1 = 2) = (1 - q)q^3, \ldots$$

Niech $N = \min\{n\colon\ U_n < 0\}$ oznacza czas ruiny.
Przyjmijmy, że parametry procesu wynoszą: $q = 3/7$, oraz $u = 7/2$. W tych warunkach ruina jest pewna, a więc $\Pr(N < \infty) = 1$. Wobec tego oczekiwany czas do ruiny $\mathrm{E}(N)$ jest wielkością dobrze określoną, i wynosi:

(A) 20

(B) 18

(C) 16

(D) 14

(E) 12

Wskazówka: zauważ, że przyrosty nadwyżki są liczbami całkowitymi, a przyrost ujemny może wynieść jedynie -1.

Zadanie 3.

Zmienne $N, M_1, M_2, M_3 \ldots$, powiązane ze zmienną K zależnością: $K = M_1 + \ldots + M_N$, spełniają założenia rozkładu złożonego.
Zmienna M_1 ma rozkład dwumianowy:

$$\Pr(M_1 = 1) = Q, \quad \Pr(M_1 = 0) = P, \quad Q \in (0,1), \quad P = 1 - Q;$$

zaś zmienna N ma rozkład ujemny dwumianowy o funkcji prawdopodobieństwa:

$$\Pr(N = k) = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!}(1-q)^r q^k, \qquad k = 0,1,2, \ldots$$

Przyjmujemy następującą interpretację zmiennych zadania:

- N - to liczba szkód, do których doszło w ciągu roku, z czego:
    - $(N - K)$ – to liczba szkód, które zgłoszone zostały przed końcem roku,
    - K – to liczba szkód zaszłych, które nie zostały w ciągu roku zgłoszone.

Jeśli parametry zadania wynoszą:

- $r = 10$;
- $q = 2/3$;
- $Q = 1/4$,

to warunkowa wartość oczekiwana:

- $E(K|N - K = m)$

dana jest wzorem:

(A) $\frac{m}{3}$

(B) $2 + \frac{m}{5}$

(C) $3 + \frac{2m}{15}$

(D) $4 + \frac{m}{15}$

(E) 5

Zadanie 4.

Pewne ryzyko generuje w kolejnych czterech kwartałach roku szkody o łącznej wartości X_1, X_2, X_3, X_4. Zmienne losowe X_i mają identyczny rozkład wykładniczy i są nawzajem niezależne. Ubezpieczyciel pokrywa łączną wartość szkód za cały rok, ceduje jednak na reasekuratora łączną wartość szkód z jednego, wybranego przez siebie kwartału (oczywiście wybierze najgorszy z nich). Jaki jest udział składki reasekuracyjnej w składce ubezpieczeniowej (obie składki policzone są według ich wartości oczekiwanej)?

(A) 19/48

(B) 21/48

(C) 23/48

(D) 25/48

(E) 27/48

Zadanie 5.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym:

- skumulowana wartość szkód $S(t)$ jest procesem złożonym Poissona, w którym intensywność pojawiania się szkód wynosi $\lambda = 100$,
- rozkład wartości pojedynczej szkody dany jest na półosi dodatniej gęstością:

$$f(x) = \frac{1}{8}\exp\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{32}x\exp\left(-\frac{x}{4}\right)$$

- intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi $c = 800$.

Wobec tego współczynnik dopasowania R wynosi:

(A) $\frac{3+\sqrt{5}}{16}$

(B) $\frac{3-\sqrt{5}}{16}$

(C) $\frac{5-3\sqrt{2}}{28}$

(D) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

(E) $\frac{5+3\sqrt{2}}{28}$

Zadanie 6.

X oraz Y to zagregowane wartości szkód dwóch rodzajów z tego samego ryzyka, których łączny rozkład zależy od wartości parametru ryzyka Θ. Rozkład ten ma następujące charakterystyki:

$$cov(X, Y|\Theta) = 2\Theta$$
$$\mathrm{E}(X|\Theta) = 3\Theta$$
$$\mathrm{E}(Y|\Theta) = \Theta$$

podczas gdy zróżnicowanie parametru Θ w populacji ryzyk daje się opisać rozkładem logarytmiczno-normalnym takim, że $\ln(\Theta)$ ma rozkład normalny o parametrach $(\mu, \sigma^2) = \left(0, \frac{1}{10}\right)$

$cov(X, Y)$ wynosi w przybliżeniu (wybierz przybliżenie najlepsze):

(A) 2.00

(B) 2.15

(C) 2.30

(D) 2.45

(E) 2.60

Zadanie 7.

Zmienna losowa X jest sumą trzech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych Poisson z parametrami odpowiednio (λ_1, F_1), (λ_2, F_2), oraz (λ_3, F_3). Wartości parametrów częstotliwości to λ_1, λ_2, λ_3, oraz dystrybuanty F_1, F_2, F_3, dane są wzorami:

i	λ_i	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $x \in [1,2)$	$F_i(x)$ dla $x \geq 2$
1	1	0	4/10	1
2	1/2	0	3/10	1
3	1/2	0	9/10	1

$\Pr(X = 3)$ wynosi:

(A) $\frac{1}{2}\exp(-2)$

(B) $\frac{2}{3}\exp(-2)$

(C) $\frac{5}{6}\exp(-2)$

(D) $\exp(-2)$

(E) $\frac{7}{6}\exp(-2)$

Zadanie 8.

Wyjściowy portfel składa się z n niezależnych ryzyk. Łączna wartość szkód dla pojedynczego ryzyka ma wartość oczekiwaną μ i odchylenie standardowe σ.
S oznacza łączną wartość szkód z tego portfela. Składkę za pojedyncze ryzyko skalkulowano w wysokości G tak, aby:
$\Pr(S > n \cdot G) = 0.01$,
przy czym prawdopodobieństwo to obliczono na podstawie aproksymacji rozkładem normalnym.
Dla naszego portfela wyjściowego mamy:
$n = 1000, \quad \mu = 10, \quad \sigma = 10.$
Pojawiła się możliwość objęcia ubezpieczeniem dodatkowych n_1 ryzyk, niezależnych nawzajem oraz niezależnych od pierwszych n ryzyk z portfela wyjściowego.
Ich charakterystyki to:
$\mu_1 = 10, \quad \sigma_1 = 14,$
Jednakże warunkiem objęcia „nowych" ryzyk jest zaoferowanie pokrycia za składkę w tej samej wysokości G, co dla „starych" ryzyk. Niech S_1 oznacza łączną wartość szkód z nowych ryzyk.

Dla jakich n_1 mamy:
$\Pr(S + S_1 > (n + n_1) \cdot G) \le 0.01$?
(*Podaj warunek konieczny i dostateczny, opierając się i tym razem na aproksymacji normalnej*)

(A) $n_1 \ge 0$

(B) $n_1 \ge 103$

(C) $n_1 \ge 250$

(D) $n_1 \le 103$

(E) $n_1 \le 250$

Zadanie 9.

W pewnym ubezpieczeniu szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona, który startuje w czasie $T_0 = 0$. Niech T_n oznacza czas zajścia n-tej szkody, przy czym jednostką pomiaru czasu jest rok. Szkody numerujemy według kolejności zajścia, zachodzi więc $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \cdots$.

Niech teraz $\bar{T}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k$ oznacza średni czas zajścia pierwszych n szkód (zmienna ta jest oczywiście określona, o ile $n > 0$).

Wariancja średniego czasu zajścia pierwszych pięciu szkód, pod warunkiem, że w ciągu pierwszego roku doszło właśnie do pięciu szkód:

$$var(\bar{T}_5 | T_5 \leq 1 < T_6)$$

wynosi:

(A) 1/60

(B) 1/50

(C) 1/45

(D) 1/40

(E) 1/30

Zadanie 10.

Liczba szkód N w ciągu roku w pewnym ubezpieczeniu ma rozkład Poissona z parametrem częstotliwości równym $\lambda = \ln(3)$.
Wartość każdej ze szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ ma ten sam rozkład Pareto o dystrybuancie określonej na półosi nieujemnej wzorem:

$$F_{Y_1}(y) = \frac{y}{1+y}$$

Wartości poszczególnych szkód i liczba szkód są niezależnymi zmiennymi losowymi.
Niech:

$$M := \begin{cases} \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\} & jeżeli\ \ N > 0 \\ 0 & w\,p.p. \end{cases}$$

Mediana warunkowego rozkładu zmiennej M, pod warunkiem że wystąpiła co najmniej jedna szkoda, a więc taka liczba y, dla której:

$$\Pr((M < y | N > 0) = \frac{1}{2}$$

Wynosi:

(A) $\frac{\ln(4)}{\ln(3)}$

(B) $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$

(C) $\frac{\ln(5/2)}{\ln(3/2)}$

(D) $\frac{\ln(2)}{\ln(3/2)}$

(E) $\frac{\ln(5/2)}{\ln(2)}$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 20 listopada 2017r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	C	
3	B	
4	D	
5	B	
6	D	
7	E	
8	A	
9	A	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.