Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXI Egzamin dla Aktuariuszy z 15 czerwca 2015 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Pracownik rozpoczyna karierę zawodową w chwili $T = 0$ i przechodzi na emeryturę w chwili $T = 40$. Przez MW_n oznaczmy miesięczne wynagrodzenie pracownika w $n-$tym roku pracy (zakładamy, że wynagrodzenie jest stałe w ciągu roku). Kształtuje się ono zgodnie z poniższym wzorem:

$$MW_n = \begin{cases} 4000 & n = 1 \\ (1+w)\cdot MW_{n-1} & n > 1 \end{cases}.$$

Pracownik oszczędza na świadczenie emerytalne w dwóch planach emerytalnych:

- w pierwszym z nich składka płacona jest na koniec każdego roku pracy oraz wynosi 15% kwoty sumarycznego wynagrodzenia pracownika w danym roku. Ponadto, na koniec każdego roku (jeszcze przed otrzymaniem składki za ten rok) dotychczas zgromadzona kwota zwiększana jest o 3% z tytułu zwrotu z inwestycji;
- w drugim planie składka płacona jest na koniec każdego roku pracy oraz wynosi 5% kwoty sumarycznego wynagrodzenia pracownika w danym roku. Ponadto, na koniec każdego roku (jeszcze przed otrzymaniem składki za ten rok) dotychczas zgromadzona kwota zwiększana jest o 5% z tytułu zwrotu z inwestycji.

Niech KE_n opisuje sumaryczny kapitał emerytalny zgromadzony w obu planach na koniec roku n (wartość już po dopisaniu kwoty wynikającej ze zwrotu z inwestycji i po wpłaceniu składki należnej za rok n). Emerytura wyznaczana w momencie końca pracy wynosi:

$$E = \frac{KE_{40}}{12\cdot TZ},$$

gdzie TZ oznacza oczekiwane dalsze trwanie życia w latach w momencie przejścia na emeryturę. Przyjmując $TZ = 12.45$ oraz $w = 5\%$ proszę wyznaczyć (podając najbliższą wartość) stopę zastąpienia w momencie przejścia na emeryturę, tj. kwotę:

$$\frac{E}{MW_{40}}.$$

A) 30%

B) 35%

C) 40%

D) 45%

E) 50%

2. Niech $T_0 = 0$. Rozważmy rynek, na którym nie ma możliwości arbitrażu. Na rynku dostępna jest akcja $\mathcal{A}$ o cenie $S_{T_0} = 100$ oraz opcja barierowa $\mathcal{O}$ na akcję $\mathcal{A}$. Opcja w chwili T_3 wypłaca następującą kwotę:

$\left(S_{T_3} - K\right)^+ \cdot \mathbb{I}\left(\max_{i=1,2,3} S_{T_i} \leq 110\right) \cdot \mathbb{I}\left(\min_{i=1,2,3} S_{T_i} \geq 90\right)$, gdzie $T_{i+1} = T_i + \frac{1}{2}$ dla $i = 0,1,2$,

natomiast $\mathbb{I}(A)$ jest funkcją charakterystyczną przyjmującą wartość 1, gdy spełniony jest warunek zadany przez A, bądź 0 w przeciwnym przypadku.

Roczna stopa wolna od ryzyka na rynku wynosi $r = 4\%$, $K = 95$, natomiast współczynnik zmienności cen akcji równy jest $\sigma = 10\%$.

W oparciu o model dwumianowy CRR (*Cox-Ross-Rubinstein*) dla kroku $\Delta t = \frac{1}{2}$ inwestor wyznaczył parametr grecki delta dla opcji $\mathcal{O}$, t.j. pochodną jej ceny po cenie akcji $\mathcal{A}$ w chwili T_0. Na cele analizy inwestor przyjął, że należy dokonać oszacowania pochodnej ilorazem różnicowym, a przez małą zmianę ceny akcji $\mathcal{A}$ należy rozumieć zmianę w cenie nie większą niż o $\Delta S = 0.1$. Wyznaczony przy tych założeniach parametr grecki delta dla opcji $\mathcal{O}$ wynosi (proszę podać najbliższą wartość):

A) 0.3
B) 0.4
C) 0.5
D) 0.6
E) 0.7

Uwaga: W modelu dwumianowym CRR (*Cox-Ross-Rubinstein*) wskaźniki u i d wzrostu i spadku ceny akcji, wyrażają się następująco:

$$u = \mathrm{e}^{\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}}, d = \frac{1}{u}.$$

3. Przyjmijmy, że na rynku spełnione są założenia modelu Blacka-Scholesa oraz dostępna jest akcja $\mathcal{A}$ niepłacąca dywidendy. Przez $O_t^{\mathcal{A},C}(S_t, K, T)$ oznaczmy opcję europejską na akcję $\mathcal{A}$ o następujących charakterystykach: opcja jest wystawiana w chwili t, cena akcji $\mathcal{A}$ w chwili t wynosi S_t, cena wykonania opcji wynosi K, a opcja wykonywana jest w momencie $T > t$; a przez $O_t^{\mathcal{A},P}(S_t, K, T)$ – europejską opcję sprzedaży na akcję $\mathcal{A}$ o tych samych parametrach. Niech $C_N^{\mathcal{A}}(q)$ będzie ceną wystawianego w chwili $t = 0$ przez firmę ABC instrumentu finansowego o następującej charakterystyce:

a) w każdej z chwil $t = 0,1, \dots, N-1$ następuje losowanie określające czy:

i) kupujący instrument otrzymuje od firmy ABC europejską opcję kupna $O_t^{\mathcal{A},C}(S_t, a \cdot S_t, T)$, czy

ii) kupujący instrument wystawia firmie ABC europejską opcję sprzedaży $O_t^{\mathcal{A},P}(S_t, a \cdot S_t, T)$;

b) prawdopodobieństwo wylosowania scenariusza i) wynosi q, a scenariusza ii) wynosi $1-q$;

c) losowania są niezależne zarówno od siebie jak i od procesu cen akcji.

Zakładając, iż $S_0 = 100$, roczna stopa wolna od ryzyka wynosi stale $r = 6.44\%$, a zmienność równa jest $\sigma = 0.3$, proszę wyznaczyć wartość a, dla której $C_{10}^{\mathcal{A}}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Proszę podać najbliższą wartość.

A) 1.40
B) 1.45
C) 1.50
D) 1.55
E) 1.60

4. W chwili 0 emitowana jest 2-letnia obligacja o nominale 1 000 PLN, rocznym kuponie w wysokości 3% nominału, płatnym na koniec każdego roku, oraz posiadająca wbudowaną opcję wcześniejszego wykupu przez emitenta. Wcześniejszy wykup może nastąpić na koniec 1-szego roku, po płatności kuponu oraz za z góry ustaloną kwotę 1 000 PLN. Zakładamy, że emitent wykona opcję wcześniejszego wykupu jeśli tylko będzie to dla niego korzystne.
Na rozważanym rynku w każdej chwili struktura stóp procentowych jest płaska, przy czym w momencie emisji stopa na każdy przyszły termin zapadalności wynosi $r_0 = 3\%$ w skali roku, w kapitalizacji dyskretnej. W końcach kolejnych lat stopa procentowa, a co za tym idzie cała struktura stóp, rośnie bądź maleje o 20%, tzn.: $r_n = u \cdot r_{n-1}$ lub $r_n = d \cdot r_{n-1}$, $n \geq 1$, gdzie $u = 1.2,\ \ d = 0.8$. Zakładamy ponadto, że rynek nie dopuszcza arbitrażu. Przy powyższych założeniach cena obligacji w momencie emisji wynosi (proszę podać najbliższą odpowiedź):

A) 994 PLN
B) 997 PLN
C) 998 PLN
D) 1 000 PLN
E) 1 026 PLN

5. Przedsiębiorstwo ma do uregulowania zobowiązanie zapadające za 2 lata w wysokości 1 mln PLN. Aby zabezpieczyć spłatę zobowiązania przedsiębiorstwo zamierza skonstruować portfel inwestycyjny przy zastosowaniu strategii polegającej na dopasowaniu obecnej wartości zobowiązań do obecnej wartości portfela obligacji oraz zapewnieniu, że zmiana wartości obecnej zobowiązań pod wpływem niewielkich wahań stopy dochodowości jest taka sama jak zmiana wartości portfela obligacji pod wpływem wahań tej stopy. Na rynku dostępne są jedynie 2 obligacje o następujących parametrach:

a) Obligacja skarbowa o terminie wykupu za 5 lat, która płaci roczny kupon w wysokości 4% nominału. Pierwsza płatność kuponu przypada za rok od momentu konstruowania portfela inwestycyjnego przez przedsiębiorstwo. Stopa rentowności (*Yield to Marutity*, *YTM*) tej obligacji wynosi 5%;
b) Obligacja skarbowa o terminie wykupu za 2 lata, która płaci roczny kupon w wysokości 5% nominału. Pierwsza płatność kuponu przypada za rok od momentu konstruowania portfela inwestycyjnego przez przedsiębiorstwo. Stopa rentowności (*Yield to Marutity*, *YTM*) tej obligacji również wynosi 5%.

Stopa rentowności dla zobowiązań jest taka sama jak stopa rentowności dla portfela obligacji i wynosi 5% w skali roku w kapitalizacji dyskretnej. Stosując założenia opisanej strategii inwestycyjnej, kwota jaką przedsiębiorstwo powinno ulokować w pierwszą z obligacji (tzn. o parametrach zadanych w punkcie a)) należy do przedziału:

A) [0 PLN, 100 000 PLN]
B) (100 000 PLN, 200 000 PLN]
C) (200 000 PLN, 300 000 PLN]
D) (300 000 PLN, 400 000 PLN]
E) (400 000 PLN, 500 000 PLN]

6. Rozważmy inwestycję, której wysokość chwili $t = 0$ wynosi 1. Następnie, dla $t > 0$, w sposób ciągły dokonywane są wpłaty z intensywnością $\alpha(t) = \beta(t) \cdot (1+t)^{-\frac{3}{2}}$, gdzie $\beta(t)$ oznacza zakumulowaną na moment $t > 0$ wartość zainwestowanych do tego momentu środków. Ciągła intensywność oprocentowania tej inwestycji wynosi $\delta(t) = (1+t)^{-\frac{1}{2}}$, dla $t \geq 0$. Wartość $\beta(8)$ wynosi (podać najbliższą odpowiedź):

A) 1
B) 5
C) 50
D) 200
E) 1000

7. Kredyt hipoteczny o wartości 450 000, oprocentowany na poziomie 4.5%, miał być spłacany w okresie 30 lat równymi ratami płatnymi na końcu roku. Zaraz po zapłaceniu 10 raty kredytobiorca dokonał dodatkowej wpłaty spłacając część pozostałego zadłużenia oraz uzgodnił z bankiem, że dalsze spłaty kredytu będą dokonywane przez następne 20 lat równymi ratami płatnymi na końcu roku. Kredytobiorca zaraz po zapłaceniu raty na końcu 20 roku (licząc od dnia uzyskania kredytu) ponownie dokonał dodatkowej wpłaty spłacając część pozostałego zadłużenia. Ustalono, również, że kredytobiorca będzie spłacał kredyt w ostatnich 10 latach równymi ratami płatnymi na końcu roku.

Wiadomo, że:

- suma zapłaconych odsetek w ratach płatnych na końcu 21, 22, 23, 24, i 25 roku wyniosła 23 535,
- suma dodatkowych wpłat dokonanych na końcu 10 i 20 roku była równa 130 538.

Obliczyć jaką część bieżącego zadłużenia kredytobiorca spłacił dokonując dodatkowej wpłaty na końcu 10 roku (proszę podać najbliższą odpowiedź):

A) 0.21
B) 0.23
C) 0.25
D) 0.27
E) 0.29

8. Kredyt o wartości 500 000, oprocentowany na poziomie 8.5%, spłacany będzie w sposób następujący:

- okres spłaty wynosi 25 lat,
- raty są płatne na końcu każdego roku,
- raty płatne na końcu pierwszego i drugiego roku są równe,
- raty płatne na końcu lat nieparzystych tworzą ciąg, w którym każdy następny wyraz jest większy od poprzedniego o R,
- raty płatne na końcu lat parzystych tworzą ciąg, w którym każdy następny wyraz jest mniejszy od poprzedniego o R.

Wiedząc, że kwota kapitału spłaconego w 15 racie jest równa 27 339 obliczyć ile wynosi wartość pierwszej raty (proszę podać najbliższą wartość):

A) 46 500
B) 47 000
C) 47 500
D) 48 000
E) 48 500

9. Spłata pożyczki 36 ratami płatnymi na końcu każdego roku odbywa się w następujący sposób:

- pierwsze 12 rat oraz ostatnie 12 rat ma wartość R,
- raty w drugim dwunastoleciu są jednakowej wysokości.

Wiadomo, że sumaryczna kwota odsetek, które powinny być zapłacone w pierwszych 12 ratach jest taka sama, jak sumaryczna kwota odsetek, które powinny być zapłacone w następnych 12 ratach.

Obliczyć ile wynosi R, jeżeli stopa procentowa jest równa 9%, a wartość udzielonej pożyczki wynosi 300 000 (proszę podać najbliższą wartość):

A) 10 255
B) 10 265
C) 10 275
D) 10 285
E) 10 295

10. Renta wieczysta wypłaca raty na końcu każdego parzystego roku. Wielkość raty wypłacanej na końcu roku *2n*, gdzie *n = 1, 2, …*, wynosi: $\frac{n \cdot (2 \cdot n - 1)}{5^n}$.

Niech *s(v)* oznacza obecną wartość tej renty obliczoną przy zastosowaniu czynnika dyskontującego *v*. Proszę wskazać wzór przedstawiający pochodną funkcji *s(v)*:

A) $\frac{40 \cdot v^5 + 400 \cdot v^3 + 350 \cdot v}{(v^2 - 5)^4}$

B) $\frac{30 \cdot v^5 + 250 \cdot v^3 + 400 \cdot v}{(v^2 - 5)^4}$

C) $\frac{40 \cdot v^5 + 350 \cdot v^3 + 400 \cdot v}{(v^2 - 5)^4}$

D) $\frac{30 \cdot v^5 + 400 \cdot v^3 + 250 \cdot v}{(v^2 - 5)^4}$

E) $\frac{40 \cdot v^5 + 250 \cdot v^3 + 400 \cdot v}{(v^2 - 5)^4}$

Dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 czerwca 2015 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	A	
3	A	
4	B	
5	A	
6	D	
7	D	
8	E	
9	B	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.