

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**XLVII Egzamin dla Aktuariuszy z 6 października 2008 r.**

**Część I**

**Matematyka finansowa**

**WERSJA TESTU A**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:**

.....

Czas egzaminu: 100 minut

- 
1. Kredytobiorca otrzyma od banku kredyt w 6 transzach, płatnych na początku roku w odstępach 3 letnich. Wysokość pierwszej transzy wyniesie 100 000, a każda kolejna transza będzie mniejsza od poprzedniej o ustaloną liczbę  $R$ .

Każda transza kredytu spłacana jest, począwszy od momentu jej otrzymania, w postaci renty o równych płatnościach na koniec kolejnych lat. W przypadku każdej z powyższych rent ostatnia rata jest płatna na koniec roku, który kończy 25 letni okres czasu, który zaczął się w momencie otrzymania pierwszej transzy kredytu.

Wyznacz wartość  $R$  (podaj najbliższą wartość), jeżeli wiadomo, że całkowite zadłużenie kredytobiorcy po 20 latach od otrzymania pierwszej transzy kredytu (po zapłaceniu rat wymaganych w tym terminie) wynosi 200 000, a roczna stopa procentowa jest równa 5%.

- A) 5 000
- B) 6 000
- C) 7 000
- D) 8 000
- E) 9 000

2. Spółkom A i B zaproponowano następujące roczne stopy oprocentowania kredytu w wysokości 1 mln PLN:

Spółka	Oprocentowanie stałe	Oprocentowanie zmienne
A	19.00%	WIBOR + 0.15%
B	21.25%	WIBOR + 0.9%

Pierwotnie spółka A otrzymała kredyt z oprocentowaniem stałym, a B z oprocentowaniem zmiennym. Jednak spółka A potrzebuje kredytu o stopie zmiennej, podczas gdy spółka B o stopie stałej.

Zaprojektowano procentowy kontrakt SWAP (kontrakt zamiany strumieni płatności) z udziałem instytucji finansowej, w ramach którego instytucja ta zyskała na transakcjach 0.5% rocznie, zaś dla obu spółek kontrakt jest jednakowo atrakcyjny.

Ile wyniesie stała stopa procentowa płacona przez spółkę B w wyniku całościowego rozliczenia?

- A) 18.90%
- B) 19.00%
- C) 20.35 %
- D) 20.75%
- E) 21.25%

3. Zasady działania funduszu oszczędnościowo-rozliczeniowego są następujące:
- pierwsza wpłata dokonana na początku pierwszego roku działalności funduszu wynosi 50 000,
  - na początku każdego roku, począwszy od drugiego roku działalności, dokonywana jest wpłata do funduszu w wysokości 2 000,
  - na końcu każdego roku (również pierwszego) dokonywana jest wypłata w wysokości 25% aktualnego stanu funduszu,
  - stopa procentowa funduszu wynosi 6%.

Wyznacz łączną kwotę wypłaconą z funduszu w okresie od początku 9 roku do końca 25 roku działalności funduszu (podaj najbliższą wartość).

- A) 51 580
- B) 51 780
- C) 52 080
- D) 52 380
- E) 52 580

4. Portfel aktywów zakładu ubezpieczeń na życie składa się z trzech instrumentów: instrument A z udziałem 30%, instrument B z udziałem 30%, instrument C z udziałem 40%. Strategia inwestycyjna zakłada utrzymanie tej alokacji w horyzoncie najbliższych 2 lat. Dla potrzeb wyceny portfela zakłada się 4 scenariusze rozwoju rynku finansowego. Rozpatrując horyzont 2 lat założenia te przedstawiają się następująco:

Symulacja	Instrument	Stopy zwrotu	
		R(0, 1)	R(1, 2)
1	Instrument A	5.0	7.0
	Instrument B	6.0	4.0
	Instrument C	10.0	12.0
2	Instrument A	12.0	10.0
	Instrument B	23.0	17.0
	Instrument C	1.5	2.0
3	Instrument A	13.0	8.0
	Instrument B	18.0	14.0
	Instrument C	10.0	2.0
4	Instrument A	3.0	1.0
	Instrument B	12.0	8.0
	Instrument C	2.0	5.0

$R(s,t)$  jest stopą zwrotu z danego instrumentu w przedziale czasu od  $s$  do  $t$ . Zakładamy, że każda z czterech symulacji ma takie samo prawdopodobieństwo realizacji. Wolna od ryzyka roczna stopa dyskontowa jest stała w czasie i wynosi 5% w każdej symulacji. Zakład ubezpieczeń dzieli się zyskami z ubezpieczonymi przekazując część nadwyżki zrealizowanego zwrotu ponad techniczną stopę procentową. Wypłata świadczeń z tytułu udziału w zyskach na koniec roku  $t$  obliczana jest według wzoru:

$$PS_t = MR_t * 80\% * \max[R(t-1, t) - i, 0]$$

$i$  – techniczna stopa procentowa równa 3%,

$R(t-1, t)$  – stopa zwrotu z portfela aktywów zrealizowana w roku  $t$  (w okresie od  $t-1$  do  $t$ ),

$MR_t$  – rezerwa na koniec roku  $t$ .

Rozpatrujemy polisę dla której wartość rezerwy na koniec pierwszego roku będzie wynosić  $MR_1 = 1\,000$  PLN, a na koniec drugiego roku  $MR_2 = 1\,200$  PLN.

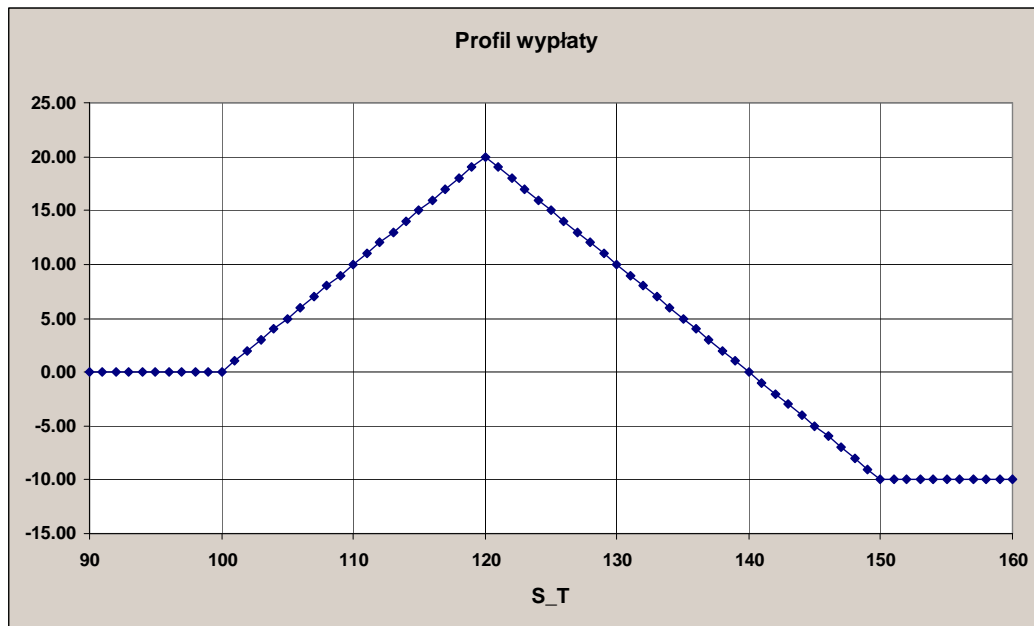
Podaj obecną (na moment  $t = 0$ ) oczekiwaną wartość świadczeń z tytułu udziału w zyskach wypłaconych w horyzoncie 2 lat (kapitalizacja dyskretna):

- A) 37.22
- B) 47.62
- C) 84.84
- D) 91.04
- E) 164.16

- 
5. Firma ubezpieczeniowa posiada zobowiązania wynikające z portfela rent pewnych. Renty te są płacone w wysokości 1 mln PLN na koniec każdego roku przez najbliższych 15 lat oraz w wysokości 2 mln PLN przez kolejnych 15 lat. Firma ulokowała całość swoich rezerw na pokrycie powyższych zobowiązań w 20 letniej obligacji z 8% kuponem rocznym. Oblicz różnicę pomiędzy *duration* pasywów i aktywów, zakładając, iż stopa procentowa wynosi 5% (podaj najbliższą wartość).

- A) 1.5
- B) 2.0
- C) 2.5
- D) 3.0
- E) 3.5

6. Inwestor stosuje strategię „motyla” (*Butterfly spread*) zbudowaną w oparciu o europejskie opcje kupna o okresie do wykonania 1 rok. Profil wypłaty (w zależności od ceny instrumentu bazowego w momencie wykonania  $S_T$ ) przedstawiony jest na rysunku:



Obecne (na moment  $t = 0$ ) kwotowania europejskich opcji sprzedaży wystawionych na instrument bazowy o obecnej cenie  $S_0 = 120$  i okresie wykonania 1 rok, w zależności od ceny wykonania  $X$  przedstawione są w tabeli:

Cena wykonania $X$	Cena opcji sprzedaży w $t = 0$
100	1.3
120	6.7
150	25.5

Zmienność  $\sigma$  (*volatility*) instrumentu bazowego jest równa 20%, wolna od ryzyka stopa procentowa wynosi 5%.

Obecny (na moment  $t = 0$ ) koszt jaki poniósł inwestor przyjmując strategię motyla, o wypłacie zgodnej z rysunkiem powyżej, wynosi (podaj najbliższą wartość):

- A) 3.90
- B) 10.81
- C) 17.50
- D) 33.50
- E) 41.55

7. Kredyt jest spłacany za pomocą 15 rosnących rat płatnych na końcu każdego roku w wysokości 11, 12, 13, ..., 25.

Wskaż wzór wyznaczający wysokość odsetek zapłaconych w 8 racie:

A)  $18 - 26v^8 + \ddot{a}_{\overline{8}|}$

B)  $18 - 25v^8 + a_{\overline{8}|}$

C)  $17 - 26v^8 + a_{\overline{8}|}$

D)  $17 - 25v^8 + \ddot{a}_{\overline{8}|}$

E) żadna z powyższych odpowiedzi A, B, C, D nie jest poprawna



8. Dane są dwie  $n$ -letnie renty pewne  $a_n$  i  $b_n$ ,  $n \geq 1$ . Renta  $a_n$  płaci  $\frac{1}{k}$  na koniec każdego roku  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ ; renta  $b_n$  płaci  $k$  na koniec każdego roku  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Niech  $D_n = \mathbf{dur}(a_n) + \mathbf{dur}(b_n)$ , gdzie  $\mathbf{dur}(a_n)$  i  $\mathbf{dur}(b_n)$  to *duration* rent  $a_n$  i  $b_n$ . Oznaczmy ponadto czynnik dyskontujący przez  $v$ ,  $0 < v < 1$ . Spośród poniższych nierówności prawdziwa jest:

- A)  $1 + (1 - v)^2 \cdot a_{\overline{n}|} \leq D_n \leq (1 + n^2) \ddot{a}_{\overline{n}|}$
- B)  $1 + (1 - v)^2 \cdot a_{\overline{n}|} \leq D_n \leq 2 \ddot{a}_{\overline{n}|}$
- C)  $2a_{\overline{n}|} \leq D_n \leq (1 + n^2) \ddot{a}_{\overline{n}|}$
- D)  $1 + (1 - v)^2 \cdot a_{\overline{n}|} \leq D_n \leq \left( \frac{1}{n^2} + 1 \right) \ddot{a}_{\overline{n}|}$
- E) żadna z powyższych.

9. Rozpatrzmy rynek, na którym występują dwa aktywa A i B. Ich wypłaty zależą od tego czy rynek znajduje się w stanie hossy czy bessy. Funkcje wypłaty oraz bieżące ceny tych aktywów podaje tabela:

	Aktywo A	Aktywo B
Hossa	4.00	1.00
Bessa	1.00	2.00
Cena	2.10	1.40

Ponadto, na rynku dostępne są jednostkowe aktywa, które płacą 1 bądź 0, w zależności od tego w którym ze stanów znajduje się rynek. Funkcje wypłaty aktywów jednostkowych podaje tabela:

	Aktywo jednostkowe hossy	Aktywo jednostkowe bessy
Hossa	1	0
Bessa	0	1

Zakładamy, że rynek nie dopuszcza arbitrażu. Ile wynosi stopa wolna od ryzyka na tym rynku? Podaj najbliższą odpowiedź.

- A) 0
- B)  $\frac{1}{9}$
- C)  $\frac{1}{10}$
- D)  $\frac{1}{3}$
- E)  $\frac{1}{20}$

---

**10.** Rozważmy amerykańską opcję sprzedaży na akcję nie płaącą dywidendy. Termin wygaśnięcia dla tej opcji upływa za 3 lata. Obecna cena akcji wynosi 150 a jej cena wykonania 160. Wiadomo, że w ciągu każdego roku cena akcji rośnie bądź maleje o 25%. Intensywność oprocentowania wynosi 0.07 (kapitalizacja ciągła). Ile wynosi obecna cena tej opcji przy założeniu braku arbitrażu? Podaj najbliższą wartość.

- A) 5
- B) 10
- C) 15
- D) 20
- E) 25

**Egzamin dla Aktuariuszy z 6 października 2008 r.****Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko: .....

Pesel: .....

OZNACZENIE WERSJI TESTU .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	D	
3	C	
4	C	
5	C	
6	A	
7	D	
8	A	
9	B	
10	D	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.