# Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

# XLV Egzamin dla Aktuariuszy z 17 marca 2008 r.

## Część I

## Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:**

.......................................................................

Czas egzaminu: 100 minut

**1.** Rozważmy portfel składający się z dwóch aktywów:

- obligacji wygasającej za 2 lata z nominałem 100 000 PLN, płacącej półroczne kupony w wysokości 3% nominału oraz
- długiej pozycji w wygasającym za 2 lata kontrakcie futures na 3-letnią (w chwili wygaśnięcia kontraktu) obligację o nominale 50 000 PLN, płacącą półroczne kupony w wysokości 3% nominału.

Stopa wolna od ryzyka jest stała i wynosi 5.5%. Duration, w latach, tego portfela wynosi w przybliżeniu:

A) 1.50
B) 1.65
C) 1.85
D) 2.45
E) 3.69

**2.** Bank inwestycyjny emituje 3-letnią obligacją o nominale 1 mln PLN. Wysokość kuponu tej obligacji związana jest z indeksem *XYZ* w następujący sposób: w *k*-tą rocznicę emisji, *k*=1,2,3, obligacja płaci kupon:

$$C_k = 5\% + 50\% \cdot \max(XYZ(k)/XYZ(k-1)-1, 0), k=1,2,3,$$
$$XYZ(0)=1250$$

Wyznaczyć cenę tej obligacji w momencie emisji jeżeli:

- rynek oczekuje, że w ciągu każdego roku indeks *XYZ* wzrośnie o 20% z prawdopodobieństwem 60%, bądź zmaleje o 20% z prawdopodobieństwem 40%,
- ceny indeksowanych inflacją obligacji zerokuponowych o nominale 1000 PLN są w momencie wyceny następujące: obligacja 1-roczna – 968 PLN, obligacja 2-letnia – 937 PLN, obligacja 3-letnia – 907 PLN,
- w momencie wyceny prognoza inflacji jest następująca: 1% w pierwszym roku, 1.1% w drugim roku, 1.2% w trzecim roku.

A) 1.18 mln PLN
B) 1.22 mln PLN
C) 1.02 mln PLN
D) 1.29 mln PLN
E) 1.32 mln PLN

*Uwaga*: Obligacje indeksowane inflacją to takie, które są wyceniane stopą realną.

**3.** Dwie różne firmy $\Phi$ i $\Psi$ wystawiają dwie obligacje zerokuponowe, o tym samym terminie wykupu i wartości wykupu równej 10 000 PLN. Każda z tych firm może stać się niewypłacalna z prawdopodobieństwem 5% ale po bankructwie jednej z nich nie może nastąpić bankructwo drugiej. Jeśli zbankrutuje firma $\Phi$, to jej obligacja wypłaca 6 000 lub 7 000 – z jednakowym prawdopodobieństwem. Jeśli natomiast firma $\Psi$ stanie się niewypłacalna, to jej obligacja wypłaca 6 200 lub 6 800, również z jednakowym prawdopodobieństwem. Ceny obligacji są równe i wynoszą 9 000. Niech *A* oznacza zwrot z obligacji firmy $\Phi$, natomiast *B* – zwrot z obligacji firmy $\Psi$. Ponadto, niech $VaR_\alpha(A)$ oznacza *Value-at-Risk* na poziomie $\alpha$ dla zwrotu *A*, $VaR_\alpha(B)$ – *Value-at-Risk* na poziomie $\alpha$ dla zwrotu *B*, natomiast $VaR_\alpha(A+B)$ – *Value-at-Risk* na poziomie $\alpha$ dla zwrotu z portfela złożonego z obligacji firm $\Phi$ i $\Psi$. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe:

A) $VaR_{5\%}(A)+VaR_{5\%}(B) > VaR_{5\%}(A+B)$ i $VaR_{2.5\%}(A) < VaR_{2.5\%}(B)$

B) $VaR_{2.5\%}(A)+VaR_{2.5\%}(B) < VaR_{2.5\%}(A+B)$ i $VaR_{5\%}(A) < VaR_{5\%}(B)$

C) $VaR_{2.5\%}(A)+VaR_{2.5\%}(B) > VaR_{2.5\%}(A+B)$ i $VaR_{5\%}(A) < VaR_{5\%}(B)$

D) $VaR_{5\%}(A)+VaR_{5\%}(B) < VaR_{5\%}(A+B)$ i $VaR_{2.5\%}(A) < VaR_{2.5\%}(B)$

E) Żadne z powyższych

*Uwaga*: Niech $\alpha \in (0,1)$. $VaR_\alpha$ (Value-at-Risk) na poziomie $\alpha$ dla zwrotu *X* określamy wzorem:

$$VaR_\alpha(X) = -\sup\{x \in \mathbf{R} : \mathrm{P}(X < x) < \alpha\}.$$

**4.** Inwestor działający na rynku opcji na akcje otrzymał w momencie $t=0$ następujące kwotowania:

- obecna cena akcji A: 42 PLN,
- nominalna stopa wolna od ryzyka: 10% w skali roku,
- europejska opcja kupna na 1 akcje A z ceną wykonania 40 PLN, wygasająca za 3 miesiące kosztuje 3 PLN,
- europejska opcja sprzedaży na 1 akcję A z ceną wykonania 40 PLN, wygasająca za 3 miesiące kosztuje 2.25 PLN.

Inwestor uważa, że wykorzystując jedną akcję A istnieje możliwość zrealizowania zysku arbitrażowego. Strategia arbitrażowa ma opierać się na zajęciu odpowiednich pozycji na rynku opcji oraz na rynku akcji i instrumentów wolnych od ryzyka. Zysk arbitrażowy na moment t=0 wynosi (do obliczeń przyjmij kapitalizację ciągłą, dopuszczamy możliwość krótkiej sprzedaży akcji bez kosztów transakcyjnych):

A) 1.66 PLN
B) 2.24 PLN
C) 2.29 PLN
D) 3.00 PLN
E) Nie ma zysku arbitrażowego, inwestor poniesie zawsze stratę

**5.** Projekt inwestycyjny charakteryzuje się następującymi strumieniami płatności: podawanymi dla każdego roku w wartościach nominalnych:

| **Rok** | **Płatność (PLN)** |
|---|---|
| 0 | - 130 |
| 1 | 70 |
| 2 | 60 |
| 3 | 50 |

Wartość bieżąca netto tego projektu (NPV), przy nominalnej stopie dyskontowej wynosi 9.1 PLN. Realna (po uwzględnieniu inflacji) stopa dyskontowa właściwa dla oceny ekonomicznej efektywności tego projektu wynosi 4.55%. Na podstawie powyższych danych określ ile wynosi przewidywana dla lat 1-3 roczna stopa inflacji, jeżeli zakłada się, że będzie ona jednakowa dla każdego roku. Wybierz najbliższą wartość.

A) 8%

B) 9%

C) 10%

D) 11%

E) 12%

**6.** Zakład ubezpieczeń rozpatruje inwestycje w dwa portfele, o których wiadomo z jakim sektorem są związane:

| **Portfel** | **Sektor** | **Premia za ryzyko** | **Współczynnik Beta sektora** |
|---|---|---|---|
| I | X | 4.1% | 0.8 |
| II | Y | 4.1% | 0.97 |

Do oceny stopy zwrotu inwestor stosuje model CAPM (Capital Asset Pricing Model). Dostępne są następujące informacje:

- stopa wolna od ryzyka mierzona dochodowością długoterminowych obligacji rządowych wynosi 6.0%,
- premia za ryzyko (nadwyżka stopy zwrotu ponad stopę wolną od ryzyka) jest określona w tabelce powyżej,
- współczynniki beta dla sektorów są określone w tabelce powyżej,
- ponadto dla portfela I istnieje dodatkowa premia za ryzyko 2.3% (narzut na ryzyko związany ze strukturą portfela),
- dla portfela II nie zidentyfikowano dodatkowych czynników ryzyka.

Wybierz poprawną odpowiedź:

A) przy uwzględnieniu dodatkowej premii za ryzyko (2.3%) zidentyfikowanej dla portfela I, inwestycja w portfel I przyniesie wyższą stopę zwrotu niż inwestycja w portfel II

B) inwestycja w portfel I przyniesie wyższą stopę zwrotu niż inwestycja w portfel II niezależnie od tego czy zostanie uwzględniona dodatkowa premia za ryzyko dla portfela I

C) inwestycja w portfel II przyniesie wyższą stopę zwrotu niż inwestycja w portfel I niezależnie od tego czy zostanie uwzględniona dodatkowa premia za ryzyko dla portfela I

D) inwestycje w oba portfele przyniosą takie same stopy zwrotu

E) informacje do których ma dostęp zakład ubezpieczeń nie wystarczają aby oszacować oczekiwaną stopę zwrotu w oparciu o model CAPM

**7.** Inwestor przyjmuje następujące założenia co do kształtowania się kursu akcji spółki X w kolejnych trzech okresach:

- obecna cena akcji wynosi 100,
- w każdym z trzech okresów cena akcji może zmienić się o +10% (z prawdopodobieństwem 70%) lub -20% w odniesieniu do jej wartości z początku okresu, a prawdopodobieństwa zmian są jednakowe w każdym okresie,
- stopa wolna od ryzyka wynosi $i$ = 8% w skali jednego okresu.

Instrument pochodny typu europejskiego wypłaca w momencie wygaśnięcia, czyli na koniec trzeciego okresu:

$$\max(100 - S, 0)$$

gdzie $S$ jest minimalną ceną akcji zrealizowaną w okresie do wygaśnięcia z uwzględnieniem ceny początkowej i końcowej.

Wartość opcji na moment obecny wynosi (podaj najbliższą wartość):

A) 5.80
B) 9.90
C) 13.6
D) 14.9
E) 15.4

**8.** Ile wynosi duration renty wieczystej, która wypłaca kwotę $k\left(-1\right)^{k}$ na koniec roku k (k = 1, 2,…). Stopa dyskontowa i = 5%. Podaj najbliższą wartość:

A) –0.045

B) –0.025

C) 0

D) 0.015

E) 0.025

**9.** Rozważmy parametr grecki *vega* europejskich opcji kupna (o cenie C) i sprzedaży (o cenie P) na rynku Blacka-Scholesa, opcje mają czas trwania T. Załóżmy, że zmienność (σ) ceny instrumentu podstawowego (S) wzrosła w chwili $t^*$ (licząc od momentu t = 0) o ε > 0. Różnica między nowymi cenami opcji kupna i sprzedaży ($C_1$ i $P_1$) wynosi:

A) $S\sqrt{T-t^*}\,\varphi(d_1)\varepsilon$

B) $(C-P)S\sqrt{T-t^*}\,\varphi(d_2)\varepsilon$

C) $(C-P)N(d_2)\varepsilon$

D) 0

E) ε

**10.** W uproszczonym modelu rynku papierów wartościowych zakładamy, że stan giełdy opisuje łańcuch Markowa czasu ciągłego o dwóch możliwych stanach – hossa (h) i bessa (b) o intensywnościach przejść podanych w następującej macierzy

$$P(t)=\begin{pmatrix} p_{hh} & p_{hb} \\ p_{bh} & p_{bb} \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3+2e^{-5t} & 2-2e^{-5t} \\ 3-3e^{-5t} & 2+3e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

W chwili $t=0$ inwestor lokuje 100 PLN na lokacie o rocznej ciągłej intensywności oprocentowania 5% i czeka pół roku. Jeżeli po pół roku na giełdzie jest hossa, inwestor kupuje wtedy jednostki funduszu inwestycyjnego o rocznej ciągłej intensywności oprocentowania 20%, zaś jeżeli jest bessa, pozostawia środki na tej samej lokacie. W chwili t=0 prawdopodobieństwo hossy na giełdzie ocenia się na równe prawdopodobieństwu bessy. Wyznacz wartość oczekiwaną rachunku inwestora po roku licząc od chwili t=0. Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A) 110
B) 111
C) 112
D) 113
E) 114

# Egzamin dla Aktuariuszy z 17 marca 2008 r.

## Matematyka finansowa

## Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ...................................................................

Pesel: ...........................................

OZNACZENIE WERSJI TESTU ............

| Zadanie nr | Odpowiedź | Punktacja♦ |
|---|---|---|
| 1 | C | |
| 2 | A | |
| 3 | C | |
| 4 | B | |
| 5 | C | |
| 6 | A | |
| 7 | B | |
| 8 | E | |
| 9 | D | |
| 10 | A | |
| | | |

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.