Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

XCVI Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 25 maja 2026r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Nr rejestracyjny: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Zmienne losowe X_1, X_2 są niezależne i mają taki sam rozkład z atomami:

$\Pr(X_1 = 0) = 6/10,$

$\Pr(X_1 = 1) = 1/10,$

i gęstością: $f(x) = 3/10$ na przedziale $(0, 1)$.

Wobec tego $\Pr(X_1 + X_2 \leq 4/3)$ wynosi:

(A) 0.950

(B) 0.945

(C) 0.940

(D) 0.935

(E) 0.930

Zadanie 2.
Zmienna losowa X jest sumą trzech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych Poisson z parametrami odpowiednio (λ_1, F_1), (λ_2, F_2), oraz (λ_3, F_3). Wartości parametrów częstotliwości λ_1, λ_2, λ_3, oraz dystrybuanty F_1, F_2, F_3, dane są wzorami:

i	λ_i	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $x \in [1,2)$	$F_i(x)$ dla $x \geq 2$
1	3/2	0	8/10	1
2	1	0	6/10	1
3	1/2	0	4/10	1

Wobec tego $\Pr(X = 3)$ wynosi:

(A) $\frac{17}{6}e^{-3}$

(B) $\frac{18}{6}e^{-3}$

(C) $\frac{19}{6}e^{-3}$

(D) $\frac{20}{6}e^{-3}$

(E) $\frac{21}{6}e^{-3}$

Zadanie 3.
Pewien podmiot posiada wyjściowy majątek o wartości w, i narażony jest na stratę X. Strata X jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym:

- $\Pr(X = 1) = 1 - \Pr(X = 0) = q$

Podmiot ten postępuje racjonalnie, a w swoich decyzjach kieruje się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności, przy czym jego funkcja użyteczności jest postaci:

- $u(x) = -\exp(-x)$

Rynek ubezpieczeniowy oferuje kontrakty ubezpieczeniowe wypłacające αX za szkodę w wysokości X dla dowolnych $\alpha \in (0, 1]$, w zamian za składkę w wysokości

- $(1 + \theta)\alpha \mathrm{E}(X)$

Jeśli założymy, że $\theta = 1/5$, zaś $q = 1/6$, wtedy dla podmiotu, o którym mowa, optymalny poziom parametru α wynosi (wybierz najlepsze przybliżenie):

(A) 0.69

(B) 0.72

(C) 0.75

(D) 0.78

(E) 0.81

Zadanie 4.
W pewnym ubezpieczeniu proces pojawiania się szkód jest procesem Poissona z oczekiwaną liczbą szkód w ciągu roku równą 1, a wartości pojedynczych szkód (niezależne nawzajem i od procesu pojawiania się szkód) mają rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$.

Ubezpieczony stosuje następującą strategię zgłaszania szkód w ciągu roku:
- Nie zgłasza szkód, dopóki nie zdarzy mu się szkoda o wartości przekraczającej ½
- Zgłasza pierwszą szkodę, która przekroczyła wartość ½, po czym zgłasza ewentualne następne szkody bez względu na to, jaka jest ich wartość.

Charakter ubezpieczenia jest przy tym taki, że decyzja o niezgłoszeniu danej szkody jest nieodwołalna – nie ma więc możliwości zgłoszenia danej szkody dopiero wtedy, kiedy zajdzie któraś z następnych szkód.

Oczekiwana liczba szkód zgłoszonych w ciągu roku z tego ubezpieczenia mieści się w przedziale:

(A) 0.53 – 0.56

(B) 0.56 – 0.59

(C) 0.59 – 0.62

(D) 0.62 – 0.65

(E) 0.65 – 0.68

Zadanie 5.

Warunkowy rozkład wartości szkód generowanych przez pojedyncze ryzyko z pewnej populacji przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ jest złożonym rozkładem Poissona:

- z oczekiwaną liczbą szkód równą λ, oraz
- z wartością oczekiwaną pojedynczej szkody równą $(5+\lambda)$

Rozkład parametru ryzyka Λ w populacji jest rozkładem Gamma o wartości oczekiwanej równej 3/10 oraz wariancji równej 3/100.

Losujemy z tej populacji (całkowicie przypadkowo) n ryzyk, które następnie generują N_n szkód o łącznej wartości S_n. Rozważmy zachowanie się zmiennej losowej S_n/N_n , określonej oczywiście o ile liczba szkód jest większa od zera.

Granica $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(\frac{S_n}{N_n}\middle|N_n > 0\right)$ wynosi:

(A) 5.2

(B) 5.3

(C) 5.4

(D) 5.5

(E) 5.6

Zadanie 6.

Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym:

$U(t) = u + (c - du)t - S(t)$, gdzie:

- $S(t)$ jest procesem o przyrostach i.i.d., o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną równą $\mu\Delta t$ i wariancją $\sigma^2\Delta t$,
- d to stopa dywidendy wypłacanej akcjonariuszom od kapitału początkowego u
- $(c - du)$ to intensywność napływu składki pomniejszonej o wypłacaną dywidendę

Podejmujemy równocześnie decyzję na temat pożądanego poziomu kapitału początkowego u oraz intensywności składki c. Wyznaczamy te parametry tak, aby zachować konkurencyjny (jak najniższy) poziom składki c, przy ograniczeniu, iż prawdopodobieństwo ruiny nie może przekroczyć z góry zadanego poziomu ψ.

Przy tych założeniach konkurencyjny poziom intensywności składki wyraża się wzorem:

$$c = \mu + a\sigma$$

Jeśli stopa dywidendy wynosi $d = 4.5\%$, a dopuszczalne prawdopodobieństwo ruiny $\psi = \exp(-4)$, to parametr a formuły składki przyjmie wartość:

(A) $\frac{8}{10}$

(B) $\frac{3\sqrt{6}}{10}$

(C) $\frac{7}{10}$

(D) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

(E) $\frac{6}{10}$

Zadanie 7.
W klasycznym modelu procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wypłat,
- proces $N(t)$ i pojedyncze wypłaty $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są niezależne.

Niech L oznacza maksymalną stratę, F_L jej dystrybuantę, zaś $\Psi(u)$ prawdopodobieństwo ruiny przy nadwyżce początkowej u. Wiadomo, że zachodzi:

$$F_L(u) = 1 - \Psi(u) = \Pr(\forall t \geq 0 \quad U(t) \geq 0).$$

Załóżmy, że wypłaty Y_i mają rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną μ, oraz iż parametr intensywności składki c wynosi $c = 120\% \lambda \mu$.

Wartość funkcji $\Psi(u)$ w punkcie $u = \mathrm{E}(L) + 1.645\sqrt{var(L)}$ wynosi w przybliżeniu:

(A) 7.15%

(B) 6.90%

(C) 6.65%

(D) 6.40%

(E) 6.15%

Zadanie 8.

Liczby szkód $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$ w kolejnych latach są, dla ustalonej wartości parametru $Q = q$, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie dwumianowym z parametrami $(1, q)$, a więc przyjmują wartość 1 z prawdopodobieństwem q, zaś wartość 0 z prawdopodobieństwem $(1-q)$. Niech $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$. Parametr ryzyka Q jest zmienną losową o gęstości na przedziale $(0, 1)$ określonej wzorem:

- $f_Q(x) = 4 \cdot (1-x)^3$.

Warunek konieczny i wystarczający na to, aby zachodziła nierówność:

- $var(N_6|N) > var(N_6)$

jest postaci:

(A) $N > 0$

(B) $N > 1$

(C) $N > 2$

(D) $N > 3$

(E) $N > 4$

Zadanie 9.

Pewne ryzyko generuje w kolejnych czterech kwartałach szkody o łącznej wartości odpowiednio X_1, X_2, X_3, X_4. Zmienne losowe X_i mają identyczny rozkład wykładniczy i są nawzajem niezależne.

Ubezpieczyciel pokrywa łączną wartość szkód za cały rok, ceduje jednak na reasekuratora łączną wartość szkód z jednego, wybranego przez siebie ex post kwartału (oczywiście wybierze najgorszy z nich). W którym z poniższych przedziałów mieści się udział składki reasekuracyjnej w składce ubezpieczeniowej (obie składki policzone są według ich wartości oczekiwanej)?

(A) 43% - 45%

(B) 45% - 47%

(C) 47% - 49%

(D) 49% - 51%

(E) 51% - 53%

Zadanie 10.

Niech $X_{t,j}$ oznacza wartość szkód zaszłych w roku t i zlikwidowanych w roku $(t+j)$, zaś $CX_{t,j} \coloneqq X_{t,0} + X_{t,1} + \cdots + X_{t,j}$ odpowiednie wartości skumulowane. Obserwujemy te wielkości dla (t,j) takich, że $t \geq 0, j \geq 0$, oraz $(t+j) \leq T$. W modelu Mack'a (zwanym też „distribution-free chain-ladder model") przyjmuje się założenie, iż dla $0 \leq t \leq T$ oraz $1 \leq j \leq T$:

- istnieją takie $f_o, f_1, \dots, f_{T-1}$, że: $E\left(CX_{t,j} \middle| CX_{t,j-1}\right) = f_{j-1} CX_{t,j-1}$,
- istnieją takie $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{T-1}^2$, że: (z poniższych odpowiedzi wybierz tę prawidłową)

(A) $var\left(CX_{t,j} \middle| CX_{t,j-1}\right) = \sigma_{j-1}^2$

(B) $var\left(CX_{t,j} \middle| CX_{t,j-1}\right) = \sigma_{j-1}^2 CX_{t,j-1}$

(C) $var\left(CX_{t,j} \middle| CX_{t,j-1}\right) = \sigma_{j-1}^2 CX_{t,j-1}^2$

(D) $var\left(CX_{t,j} \middle| CX_{t,j-1}\right) = \sigma_{j-1}^2 X_{t,j-1}$

(E) $var\left(CX_{t,j} \middle| CX_{t,j-1}\right) = \sigma_{j-1}^2 X_{t,j-1}^2$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 25 maja 2026r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Nr rejestracyjny:~~ ....K L U C Z O D P O W I E D Z I......................

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	D	
3	D	
4	C	
5	C	
6	E	
7	A	
8	B	
9	E	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna

.