Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

XC Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 26 lutego 2024r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.
W pewnej grupie ubezpieczeń działu II (nie jest to grupa 14-ta) składka zarobiona oraz współczynniki szkodowości na udziale własnym w latach 2018 – 2023 wyniosły:

Rok	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Składka zarobiona	105	110	110	115	120	120
Współczynnik szkodowości	50%	64%	62%	50%	70,5%	55%

Wypłaty odszkodowań na udziale własnym w roku 2023 wyniosły 112.
Rezerwa na wyrównanie szkodowości wyznaczona na koniec 2022 roku wyniosła 12.
Wartość rezerwy na wyrównanie szkodowości na koniec 2023 roku wynosi:

(A) 17,3

(B) 17,4

(C) 17,5

(D) 17,6

(E) 17,7

Uwaga: treść tego zadania została przeredagowana po egzaminie

Zadanie 2.
W pewnej grupie ubezpieczeń szkodowość wykazuje w ciągu roku wahania sezonowe. Całoroczny współczynnik szkodowości rozkłada się na poszczególne kwartały w sposób następujący:

kwartał	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Udział w roku	10%	30%	50%	10%

Mamy dane o składce przypisanej w agregacji kwartalnej:

kwartał	2022, Q_1	2022, Q_2	2022, Q_3	2022, Q_4	2023, Q_1
Składka przypisana	170	180	200	220	200

Przyjmijmy założenia upraszczające, iż zarówno narastanie składki przypisanej jak i natężenie szkodowości w ciągu każdego z kwartałów rozkładają się równomiernie. Ponadto wiemy, że w tej grupie ubezpieczeń wystawiane są jedynie polisy roczne.

Wyznacz wartość rezerwy składki na koniec pierwszego kwartału 2023.

(A) 410

(B) 433

(C) 460

(D) 485

(E) 514

Zadanie 3.
Kierowca, którego charakteryzuje wartość q parametru ryzyka Q, zgłasza szkody (jedną lub więcej) w ciągu roku z prawdopodobieństwem q, zaś nie zgłasza szkód z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$, przy czym zdarzenia te w kolejnych latach są zdarzeniami niezależnymi. Jeśli kierowcę z tej populacji przypadkowo wylosujemy, to charakteryzującą go wartość parametru q traktujemy jako realizację zmiennej losowej Q. Populacja jest niejednorodna, w związku z czym $var(Q) > 0$.
Zakładamy, że populacja jest zamknięta (starzy kierowcy nie znikają, nowi się nie pojawiają). Kierowcy migrują pomiędzy klasami bardzo prostego, 3-klasowego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, ląduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Ląduje w klasie drugiej, o ile w danym roku był w klasie pierwszej;
- Ląduje w klasie trzeciej, o ile w danym roku był w klasie drugiej lub trzeciej.

Na podstawie obserwacji ustaliliśmy, że frakcja kierowców z tej populacji przebywających w klasie pierwszej wynosi 20%, w klasie drugiej 4%, zaś w klasie trzeciej 76%. Oczywiście pominęliśmy przy tym obserwacje z pierwszych paru lat funkcjonowania systemu bonus-malus, kiedy przynależność do klasy zależała jeszcze od klasy startowej.
Wobec tego $var(Q)$ wynosi:

(A) 0,12

(B) 0,13

(C) 0,14

(D) 0,15

(E) 0,16

Zadanie 4.
W pewnym ubezpieczeniu szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona, który startuje w czasie $T_0 = 0$. Niech T_n oznacza czas zajścia n-tej szkody, przy czym jednostką pomiaru czasu jest rok. Szkody numerujemy według kolejności zajścia, zachodzi więc $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \cdots$.
Niech teraz $\bar{T}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k$ oznacza średni czas zajścia pierwszych n szkód (zmienna ta jest oczywiście określona, o ile $n > 0$).
Wariancja średniego czasu zajścia pierwszych czterech szkód, pod warunkiem, że w ciągu pierwszego roku doszło właśnie do czterech szkód:

$$var(\bar{T}_4 | T_4 \leq 1 < T_5)$$

wynosi:

(A) 1/64

(B) 1/60

(C) 1/56

(D) 1/52

(E) 1/48

Zadanie 5.
Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym:

- skumulowana wartość szkód $S(t)$ jest procesem złożonym Poissona, w którym intensywność pojawiania się szkód wynosi $\lambda = 100$,
- rozkład wartości pojedynczej szkody dany jest na półosi dodatniej gęstością:

$$f(x) = \frac{1}{16}\exp\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{3}{64}x\exp\left(-\frac{x}{4}\right)$$

- intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi $c = 800$.

Wobec tego współczynnik dopasowania R wynosi:

(A) $\frac{3+\sqrt{5}}{16}$

(B) $\frac{3-\sqrt{5}}{16}$

(C) $\frac{5-3\sqrt{2}}{28}$

(D) $\frac{3-\sqrt{7}}{16}$

(E) $\frac{3-\sqrt{5}}{28}$

Zadanie 6.

Pewne ryzyko generuje w kolejnych czterech kwartałach roku szkody o łącznej wartości X_1, X_2, X_3, X_4. Zmienne losowe X_i są niezależne i mają identyczny rozkład złożony, gdzie w losowej sumie losowych składników:

$X_1 = Y_1 + \cdots + Y_N$,

liczba szkód N ma rozkład o prawdopodobieństwach danych wzorem:

$\Pr(N = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k, \qquad k = 0,1,2,\ldots,$

zaś wartość pojedynczej szkody ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1.

Ubezpieczyciel pokrywa łączną wartość szkód za cały rok, ceduje jednak na reasekuratora łączną wartość szkód z jednego, wybranego przez siebie kwartału (oczywiście wybierze najgorszy z nich). Jaki jest udział składki reasekuracyjnej w składce ubezpieczeniowej (obie składki policzone są według ich wartości oczekiwanej)?

(A) 12/27

(B) 14/27

(C) 16/27

(D) 17/27

(E) 18/27

Zadanie 7.
Rozważamy model nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:
$U_n = u + X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa (nieujemna);
- $X_1, X_2, X_3, \ldots$ są i.i.d, i reprezentują różnice pomiędzy wpływami ze składki a wydatkami na odszkodowania w kolejnych latach.

Zmienna $\boldsymbol{X_1}$ ma rozkład geometryczny przesunięty:

$\Pr(X_1 = -1) = 1 - q$,
$\Pr(X_1 = 0) = (1 - q)q$,
$\Pr(X_1 = 1) = (1 - q)q^2$,
$\Pr(X_1 = 2) = (1 - q)q^3$, …

Niech $N = \min\{n\colon\ U_n < 0\}$ oznacza czas ruiny.
Przyjmijmy, że parametry procesu wynoszą: $q = 4/10$, oraz $u = 7/2$. W tych warunkach ruina jest pewna, a więc $\Pr(N < \infty) = 1$. Wobec tego oczekiwany czas do ruiny $\mathrm{E}(N)$ jest wielkością dobrze określoną, i wynosi:

.
(A) 16

(B) 14

(C) 12

(D) 10

(E) 8

Zadanie 8.
Wyjściowy portfel składa się z n niezależnych ryzyk. Łączna wartość szkód dla każdego z nich ma wartość oczekiwaną μ i odchylenie standardowe σ.
S oznacza łączną wartość szkód z tego portfela. Składkę za pojedyncze ryzyko skalkulowano w wysokości G tak, aby:
$\Pr(S > nG) = \varepsilon$, (gdzie ε jest liczbą dodatnią bliższą zeru niż jedynce),
posługując się aproksymacją normalną rozkładu zmiennej S.
Dla naszego portfela wyjściowego mamy:
$n = 1000, \quad \mu = 10, \quad \sigma = 10.$

Pojawiła się możliwość objęcia ubezpieczeniem dodatkowych n_1 ryzyk, niezależnych nawzajem oraz niezależnych od pierwszych n ryzyk z portfela wyjściowego.
Każde z nich ma tę samą wartość oczekiwaną i wariancję:
$\mu_1 = 10, \quad \sigma_1 = 15.$
Jednakże warunkiem objęcia „nowych" ryzyk jest zaoferowanie pokrycia w zamian za składkę w tej samej wysokości G, co dla „starych" ryzyk.

Niech S_1 oznacza łączną wartość szkód z nowych ryzyk.
Dla jakich n_1 mamy:
$\Pr(S + S_1 > (n + n_1)G) \leq \varepsilon$?
(*Podaj warunek konieczny i dostateczny, opierając się i tym razem na aproksymacji normalnej*)

(A) $n_1 \geq 0$

(B) $n_1 \geq 103$

(C) $n_1 \geq 250$

(D) $n_1 \geq 360$

(E) nie można wyznaczyć n_1 bez znajomości dokładnej wartości parametru ε

Zadanie 9.
W procesie nadwyżki ubezpieczyciela narastanie wartości odszkodowań przebiega zgodnie z założeniami procesu złożonego Poissona, zaś składka napływa z intensywnością wyższą od wartości oczekiwanej szkód za jednostkę czasu (stosunkowy narzut bezpieczeństwa na składkę netto θ jest dodatni). Wartość pojedynczej szkody Y jest zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha = 3$, $\beta = 3$
.
Niech l_1 oznacza zmienną wyrażającą (na półosi dodatniej) spadek, jakiemu ulegnie nadwyżka po raz pierwszy, licząc od jej poziomu początkowego, o ile kiedykolwiek do takiego spadku dojdzie.
$var(l_1)$ wynosi:

(A) $8/27$

(B) $9/27$

(C) $12/27$

(D) $18/27$

(E) żadna z powyższych, bo $var(l_1)$ zależy od parametru θ

Zadanie 10.
Portfel składa się z 2000 niezależnych, identycznych ryzyk. Dla każdego z nich liczba szkód ma rozkład Poissona z parametrem częstotliwości 0.05, a wartości poszczególnych szkód są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,1)$.
Uznano, iż rozkład łącznej wartości szkód z portfela ma zbyt wysoki wskaźnik skośności (stosunek trzeciego momentu centralnego do sześcianu odchylenia standardowego). Rozważa się odstąpienie reasekuratorowi nadwyżki każdej szkody z portfela ponad d.

Wskaż taką wartość $d \in (0,1)$, dla której wskaźnik skośności rozkładu łącznej wartości szkód na udziale własnym wyniesie 0.1

(A) 0.8

(B) 0.6

(C) 0.4

(D) 0.2

(E) takie $d \in (0,1)$ nie istnieje

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 26 lutego 2024r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	E	
3	A	
4	E	
5	D	
6	D	
7	C	
8	C	
9	A	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna

.