Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXIX Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 16 października 2023r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.
Zmienne losowe X_1, X_2, X_3 są niezależne i mają taki sam rozkład z atomami:

$$\Pr(X_1 = 0) = 0.25,$$
$$\Pr(X_1 = 1) = 0.25,$$

i gęstością: $f(x) = 0.5$ na przedziale $(0, 1)$.
Wobec tego $\Pr(X_1 + X_2 + X_3 \leq 1)$ wynosi:

(A) $\frac{48}{192}$

(B) $\frac{49}{192}$

(C) $\frac{50}{192}$

(D) $\frac{51}{192}$

(E) $\frac{52}{192}$

Zadanie 2.

Zmienna losowa X jest sumą czterech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych Poisson z parametrami odpowiednio (λ_i, F_i), $i = 1,2,3,4$. Wartości parametrów częstotliwości λ_i oraz dystrybuanty F_i dane są wzorami:

i	λ_i	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $x \in [1, 2)$	$F_i(x)$ dla $x \in [2, 3)$	$F_i(x)$ dla $x \geq 3$
1	1/2	0	5/10	8/10	1
2	1	0	6/10	8/10	1
3	1/2	0	3/10	8/10	1
4	1	0	8/10	8/10	1

Wobec tego $\Pr(X = 3)$ wynosi:

(A) $1.176e^{-3}$

(B) $1.446e^{-3}$

(C) $1.716e^{-3}$

(D) $2.166e^{-3}$

(E) $2.652e^{-3}$

Zadanie 3.
Liczba szkód *N*, które zachodzą w ciągu roku z pewnego portfela ryzyk, ma rozkład o funkcji prawdopodobieństwa:
$\Pr(N = k) = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!} p^r q^k, \quad k = 0,1,2,\ldots$
Z tej liczby N_0 to liczba tych szkód, o których zajściu dowiadujemy się przed końcem tego roku, i ma ona rozkład złożony:
$N_0 = M_1 + M_2 + \cdots + M_N,$
gdzie $M_1, M_2, M_3, \ldots$ to zmienne losowe o tym samym rozkładzie dwupunktowym:
$\Pr(M_1 = 1) = Q, \ \Pr(M_1 = 0) = 1 - Q,$ niezależne nawzajem i od zmiennej *N*.
Załóżmy, że parametry ww. rozkładów wynoszą:
$r = 4, \ q = 100/101, \ p = 1 - q, \ Q = 1/2.$
Wtedy $cov(N_0, N - N_0)$ wynosi:

(A) 10000

(B) 10250

(C) 10500

(D) 10750

(E) 10100

Zadanie 4.

Niech:

- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- $T_1, T_2, \ldots, T_N$ oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go,…, N-tego (numeracja roszczeń od 1-go do N-tego jest całkowicie przypadkowa, nie wynika więc z chronologii ich zgłaszania)

Załóżmy, że:

- zmienne losowe $N, T_1, T_2, T_3, \ldots$ są niezależne,
- zmienne losowe $T_1, T_2, T_3, \ldots$ mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1 (jednostką pomiaru czasu jest miesiąc)
- zmienna losowa N ma rozkład logarytmiczny dany wzorem:

$$\Pr(N = k) = \frac{1}{-\ln(1-c)} \frac{c^k}{k}, \quad k = 1,2,3,\ldots \qquad \text{z parametrem } c = \frac{1}{4}e.$$

Właśnie pojawiło się roszczenie, i okazało się, że jest to pierwsze roszczenie z wypadku o którym dotąd nie wiedzieliśmy, a który miał miejsce miesiąc temu. Jednym słowem, wiadomo, że zaszedł wypadek, wiemy więc, że N wyniosło co najmniej 1, i że najmniejsza liczba ze zbioru $\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$, przyjęła wartość 1.

Wartość oczekiwana liczby roszczeń z tego wypadku, a więc:

$$\mathrm{E}(N \mid \min\{T_1, T_2, \ldots, T_N\} = 1)$$

wynosi:

(A) e

(B) $e - 1/2$

(C) 2

(D) $4/3$

(E) 3/2

Zadanie 5.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela, a więc proces:

$U(t) = u + (1+\theta)\lambda\mu_Y t - S_{N(t)}$, gdzie:

- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ (lub zero, jeśli $n = 0$)
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie danym na półosi dodatniej gęstością: $f_Y(y) = \frac{\alpha v^{\alpha}}{(v+y)^{\alpha+1}}$.

Wiemy, że parametry procesu wynoszą:

- $\alpha = 4, v = 4, \theta = \frac{1}{5}$

Prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u)$, a więc zdarzenia:

- $\exists T > 0$ takie, że $U(T) < 0$

jest funkcją nadwyżki początkowej *u*. Wiadomo, że dla odpowiednio dobranych parametrów a, b, c funkcja ta spełnia zależność:

$$\lim_{u\to\infty} \Psi(u)(1+au)^b = c$$

(A) $(a,b,c) = \left(\frac{1}{4}, 4, 5\right)$

(B) $(a,b,c) = \left(\frac{1}{5}, 3, 4\right)$

(C) $(a,b,c) = \left(\frac{1}{5}, 4, 5\right)$

(D) $(a,b,c) = \left(\frac{1}{4}, 3, 5\right)$

(E) $(a,b,c) = \left(\frac{1}{4}, 4, 4\right)$

Zadanie 6.

Rozważmy funkcję hazardu postaci $h(x) \coloneqq \frac{f(x)}{1-F(x)}$, gdzie f oraz F to odpowiednio gęstość i dystrybuanta rozkładu Gamma $(\alpha, 1)$, z wartością oczekiwaną i wariancją równymi α.

Wybierz zdanie poprawnie charakteryzujące przebieg funkcji $h(x)$:

(A) $h(x)$ jest niemalejąca dla dowolnych $\alpha > 0$

(B) $h(x)$ jest nierosnąca dla dowolnych $\alpha > 0$

(C) $h(x)$ jest niemalejąca gdy $\alpha \geq 1$ i nierosnąca dla $\alpha \in (0, 1]$

(D) $h(x)$ jest nierosnąca gdy $\alpha \geq 1$ i niemalejąca dla $\alpha \in (0, 1]$

(E) przy pewnych wartościach parametru α funkcja $h(x)$ na pewnych przedziałach rośnie, a na innych maleje

Zadanie 7.
Rozważamy model nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:
$U_n = u + X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa,
- $X_1, X_2, X_3, \dots$ są i.i.d, i reprezentują różnice pomiędzy wpływami ze składki a wydatkami na odszkodowania w kolejnych latach;
- rozkład zmiennej X_1 jest dwupunktowy:
  $\Pr(X_1 = 1) = \frac{15}{19}$,
  $\Pr(X_1 = -2) = \frac{4}{19}$.

Wiadomo, że jeśli dodatnia nadwyżka początkowa jest nieparzystą wielokrotnością liczby $\frac{1}{2}$, to funkcję prawdopodobieństwa ruiny można obustronnie oszacować w sposób następujący:

$$a^{u+\frac{3}{2}} \leq \Psi(u) \leq a^{u+\frac{1}{2}}$$

Liczba a wynosi:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{3}{4}$

(E) $\frac{4}{5}$

Zadanie 8.

Łączna wartość szkód z pewnego ryzyka:

$$S = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N,$$

jest zmienną losową o złożonym rozkładzie Poissona. Trzy niezależne podmioty pokrywają części S_1, S_2, oraz S_3 całkowitej wartości zmiennej S:

$$S_1 = min\{d, Y_1\} + min\{d, Y_2\} + \cdots + min\{d, Y_N\},$$
$$S_3 = max\{0, Y_1 - M\} + max\{0, Y_2 - M\} + \cdots + max\{0, Y_N - M\},$$
$$S_2 = S - S_1 - S_3,$$

gdzie parametry podziału odpowiedzialności spełniają warunki $M > d > 0$.

Jeśli przyjmiemy, że:

$$\mathrm{E}(N) = 20,$$
$$d = 4,$$
$$M = 10,$$

oraz iż dystrybuanta rozkładu wartości pojedynczej szkody dana jest na półosi nieujemnej wzorem:

$$Pr(Y_1 \le y) = 1 - \left(\frac{10}{10+y}\right)^5,$$

to $cov(S_1, S_3)$ wynosi:

(A) 12.5

(B) 15

(C) 17.5

(D) 20

(E) 25

Zadanie 9.

Łączna wartość szkód $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$ ma rozkład złożony.
Rozkład liczby szkód *N* dany jest wzorem:
$\Pr(N = k) = (1 - q)q^k, \quad k = 0,1,2, \ldots$
Zaś rozkład wartości pojedynczej szkody dany jest wzorem:
$\Pr(Y_1 = k) = (1 - Q)Q^k, \quad k = 0,1,2, \ldots$
Parametry powyższych rozkładów wynoszą $q = 2/3$ oraz $Q = 1/3$.
Wobec tego wartość ilorazu $\frac{\Pr(X=k)}{\Pr(X=k-1)}$ dla dowolnego $k \in \{2,3,4, \ldots.\}$ wynosi:

(A) 1/2

(B) 3/5

(C) 2/3

(D) 3/4

(E) Iloraz $\frac{\Pr(X=k)}{\Pr(X=k-1)}$ nie jest stały dla k ze zbioru $\{2,3,4, \ldots.\}$

Zadanie 10.
W pewnym ubezpieczeniu szkody zawsze likwidowane są nie później, niż w roku następującym po roku zajścia. Niech $X_{t,0}$ oraz $X_{t,1}$ oznaczają łączną wartość szkód zaistniałych w roku *t*, a likwidowanych w tym samym roku oraz w roku następnym, odpowiednio. Mamy w dyspozycji próbkę obserwacji z lat $t = 1,2,...,n$:

- $X_{1,0}, X_{1,1}, X_{2,0}, X_{2,1},..., X_{n,0}, X_{n,1}$.

Zakładamy, że wszystkie powyższe zmienne są niezależne, i mają rozkłady Gamma o parametrach:

$X_{t,0} \sim \Gamma(\alpha_0, \beta)$, $\quad t = 1,2,...,n$,

$X_{t,1} \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$, $\quad t = 1,2,...,n$.

Nie znamy wartości parametrów $(\alpha_0, \alpha_1, \beta)$, w istocie jednak interesuje nas jedynie parametr $d \coloneqq \frac{\alpha_0+\alpha_1}{\alpha_0}$.
Rozważamy estymator tego parametru postaci:

$$\hat{d} \coloneqq \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(X_{t,0}+X_{t,1}\right)}{\sum_{t=1}^{n} X_{t,0}}$$

Obciążenie tego estymatora, czyli $\{E(\hat{d}) - d\}$, dane jest wzorem:

(A) $\frac{\alpha_1}{\alpha_0(n\alpha_0-2)}$

(B) $\frac{\alpha_1}{\alpha_0(n\alpha_0-1)}$

(C) $\frac{\alpha_1}{n\alpha_0^2}$

(D) $\frac{\alpha_1}{\alpha_0(n\alpha_0+1)}$

(E) $\frac{\alpha_1}{\alpha_0(n\alpha_0+2)}$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 16 października 2023r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....KLUCZ ODPOWIEDZI..

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	E	
3	A	
4	D	
5	D	
6	C	
7	C	
8	A	
9	B	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna

.