Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXVIII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 13 czerwca 2023 r.

Modelowanie

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....

Czas trwania egzaminu: 120 minut

Uwagi

a) W prezentowanych wynikach separatorem dziesiętnym (znakiem dziesiętnym) jest kropka „ .”.

b) W prezentowanych wynikach oszacowań modeli:
- Residual deviance i Resid. Dev – oznacza dewiancję oszacowanego modelu,
- Null deviance – oznacza dewiancję modelu zerowego,
- Deviance – redukcję dewiancji po dodaniu kolejnej zmiennej objaśniającej,
- Df – stopnie swobody,
- Sum Sq – suma kwadratów,
- 'log Lik.' – logarytm wiarygodności.

c) Wartości $\chi^2_{\alpha;\upsilon}$ rozkładu chi-kwadrat spełniające warunek $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;\upsilon}) = \alpha$.

υ \ α	***0.99***	***0.95***	***0.90***	***0.48***	***0.49***	***0.50***	***0.10***	***0.05***	***0.01***	***0.0085***	***0.0086***	***0.0087***
1	0.000	0.004	0.016	0.499	0.477	0.455	2.706	3.841	6.635	6.925	6.904	6.883
2	0.020	0.103	0.211	1.468	1.427	1.386	4.605	5.991	9.210	9.535	9.512	9.489
3	0.115	0.352	0.584	2.474	2.420	2.366	6.251	7.815	11.345	11.696	11.671	11.646
4	0.297	0.711	1.064	3.486	3.421	3.357	7.779	9.488	13.277	13.650	13.623	13.597
5	0.554	1.145	1.610	4.499	4.425	4.351	9.236	11.070	15.086	15.479	15.451	15.423
6	0.872	1.635	2.204	5.512	5.430	5.348	10.645	12.592	16.812	17.222	17.193	17.164
7	1.239	2.167	2.833	6.525	6.435	6.346	12.017	14.067	18.475	18.902	18.871	18.841
8	1.646	2.733	3.490	7.537	7.440	7.344	13.362	15.507	20.090	20.532	20.500	20.469
9	2.088	3.325	4.168	8.548	8.445	8.343	14.684	16.919	21.666	22.122	22.089	22.057
10	2.558	3.940	4.865	9.559	9.450	9.342	15.987	18.307	23.209	23.679	23.645	23.612
11	3.053	4.575	5.578	10.570	10.455	10.341	17.275	19.675	24.725	25.207	25.173	25.139
12	3.571	5.226	6.304	11.580	11.460	11.340	18.549	21.026	26.217	26.712	26.676	26.641
13	4.107	5.892	7.042	12.589	12.464	12.340	19.812	22.362	27.688	28.195	28.159	28.123
14	4.660	6.571	7.790	13.599	13.469	13.339	21.064	23.685	29.141	29.659	29.622	29.585
15	5.229	7.261	8.547	14.608	14.473	14.339	22.307	24.996	30.578	31.107	31.069	31.032
16	5.812	7.962	9.312	15.617	15.477	15.338	23.542	26.296	32.000	32.540	32.501	32.463
17	6.408	8.672	10.085	16.626	16.481	16.338	24.769	27.587	33.409	33.959	33.919	33.880
18	7.015	9.390	10.865	17.634	17.485	17.338	25.989	28.869	34.805	35.365	35.325	35.286
19	7.633	10.117	11.651	18.642	18.489	18.338	27.204	30.144	36.191	36.761	36.720	36.679
20	8.260	10.851	12.443	19.650	19.493	19.337	28.412	31.410	37.566	38.145	38.104	38.063

Zadanie 1.

Dla pewnego portfela ubezpieczeń badano zależność rocznej liczby szkód (zmienna *clm.count*) od wieku ubezpieczonego wyrażonego w latach (zmienna ilościowa *driver.age*) oraz płci (zmienna jakościowa *driver.gender*, przyjmująca dwie wartości: *Female*, *Male*). Oszacowano dwa modele regresji Poissona z kanonicznymi funkcjami łączącymi (linkami kanonicznymi). W obydwu modelach jako zmienną offsetową uwzględniono czas ekspozycji na ryzyko w latach (zmienna *exposure*). Uzyskano następujące wyniki:

Model M1:

```
Call:
glm(formula = clm.count ~ driver.age + driver.gender + offset(log(exposure)),
   family = poisson, data = zbior.uczacy)
Deviance Residuals:
   Min      1Q  Median      3Q     Max
-0.6960  -0.4767  -0.3828  -0.2566   4.8785
Coefficients:
                    Estimate     Std. Error    z value      Pr(>|z|)
(Intercept)         -1.231453    0.107225      -11.485      < 2e-16 ***
driver.age          -0.009330    0.002082      -4.482       7.39e-06 ***
driver.genderMale   -0.189300    0.065907      -2.872       0.00408 **
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)
Null deviance: 9881.4  on 24455  degrees of freedom
Residual deviance: 9852.1  on 24453  degrees of freedom
'log Lik.' -6865.075
```

Model M2 (zmienna $driver.age.kw = driver.age^2$)**:**

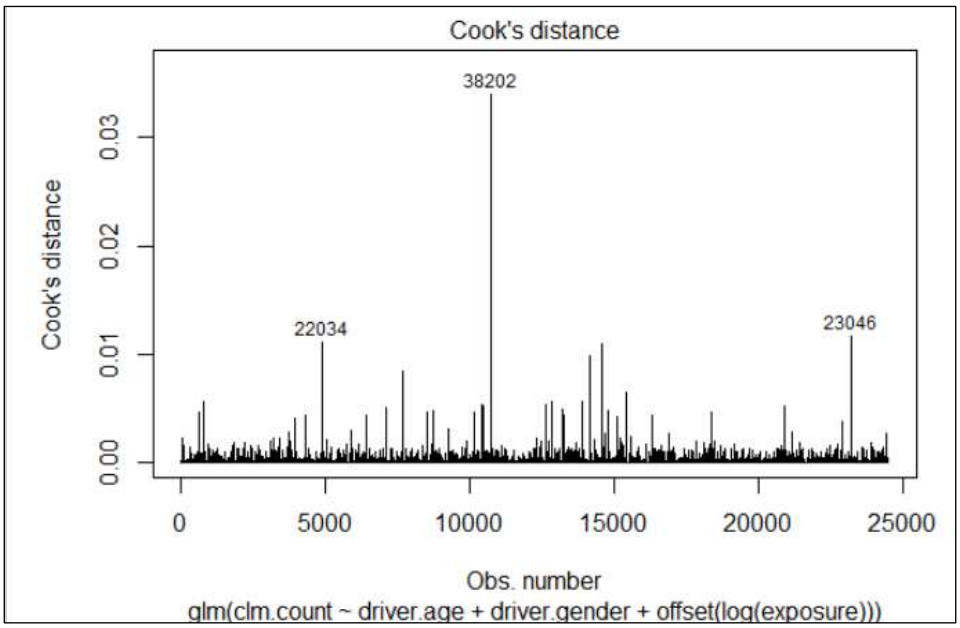
```
Call:
glm(formula = clm.count ~ driver.age + driver.age.kw + driver.gender +
   offset(log(exposure)), family = poisson, data = zbior.uczacy)
Deviance Residuals:
   Min      1Q  Median      3Q     Max
-0.9647  -0.4706  -0.3824  -0.2692   4.8862
Coefficients:
                    Estimate     Std. Error    z value      Pr(>|z|)
(Intercept)         -3.647114    0.530283      -6.878       6.08e-12 ***
driver.age           0.018353    0.006276      2.924        0.00345 **
driver.age.kw        0.000493    0.000106      4.665        3.09e-06 ***
driver.genderMale   -0.187095    0.065926      -2.838       0.00454 **
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)
Null deviance: 9881.4  on 24455  degrees of freedom
Residual deviance: 9831.9  on 24452  degrees of freedom
'log Lik.' -6855
```

a) **(*2p.*)** Wyjaśnij związek między wiarygodnością *L*, a kryterium informacyjnym AIC i wskaż kiedy każdy z tych mierników może być użyty do porównania różnych modeli. Który z oszacowanych modeli (tzn. M1, M2) jest lepszy? Wybór uzasadnij.

b) (***2p.***) W zbiorze uczącym wykorzystanym do oszacowania obydwu modeli znajduje się 46-ścio letnia kobieta z trzymiesięczną ekspozycją na ryzyko, w czasie której nie zgłosiła żadnej szkody. Wykorzystując model M1:
   - oszacuj prawdopodobieństwo, że w ciągu jednego roku nie zgłosi ona żadnej szkody,
   - wyznacz resztę Pearsona odpowiadającą tej obserwacji.

c) **(*1p.*)** Na rysunku 1.1 przedstawiono jeden z wykresów diagnostycznych dla modelu M1. Wyjaśnij w jakim celu wykorzystuje się tego typu wykresy. Czy dla modelu M2 uzyskamy identyczny? Odpowiedź uzasadnij.

Rys. 1.1



Odpowiedzi

.....

Odp. a)

W odpowiedzi należało wskazać, że:

- AIC = -2 logarytm wiarygodności + 2*liczba oszacowanych parametrów.
- wiarygodność można wykorzystać do porównywania modeli które posiadają taką samą liczbę parametrów lub są zagnieżdżone. Kryterium informacyjne AIC jest bardziej przydatne, gdy modele różnią się liczbą parametrów i są zbudowane na innym zestawie zmiennych objaśniających.
- model M2 jest lepszy.

.....

Odp. b)

$$\hat{\mu} = \exp(-1.231453 - 0.009330 \cdot 46 - 0.189300 \cdot 0) = 0.190019$$

Prawdopodobieństwo: 0.8269433

Reszta Pearsona: $r_P = \frac{y-\hat{y}}{\sqrt{\hat{y}}} = \frac{0-0.25 \cdot 0.190019}{\sqrt{0.25 \cdot 0.190019}} = -0.2179559$

.....

Odp. c)

Należało wskazać, że

- wykres „Cook's distance" jest wykorzystywany w analizie regresji jako miara wpływu poszczególnych obserwacji na wyniki regresji. Umożliwia wykrycie obserwacji, które znacząco wpływają na wyniki regresji, a tym samym pozwala zbadać ich wpływ na model.
- dla M2 uzyska się inny wykres, ponieważ w mierze Cooka uwzględnia się reszty modeli.

Zadanie 2.

a) **(1*p*.)** Wyjaśnij w jaki sposób przeprowadza się *k*-krotną walidację krzyżową.

b) **(1*p*.)** Podaj na czym polega walidacja za pomocą metody LOOCV (*Leave-one-out cross-validation*).

c) **(2*p*.)** Jakie są zalety i wady *k*-krotnej walidacji krzyżowej w porównaniu z:
   i. podejściem wykorzystującym jedynie jeden zbiór walidacyjny,
   ii. metodą LOOCV.

   W odpowiedzi uwzględnij problem kompromisu między obciążeniem a wariancją modelu.

d) **(1*p*.)** Oszacowano model regresji liniowej na podstawie 5-ciu obserwacji. Uzyskano następujące reszty: 1.78, -1.30, 1.09, -1.89, 0.32. Wiadomo, że w analizowanym przypadku macierz daszkowa jest równa:

$$H = \begin{bmatrix} 0.29 & 0.24 & -0.03 & 0.15 & 0.35 \\ & 0.22 & 0.09 & 0.17 & 0.27 \\ & & 0.80 & 0.34 & -0.20 \\ & & & 0.23 & 0.11 \\ & & & & 0.46 \end{bmatrix}$$

Walidację tego modelu przeprowadzono z wykorzystaniem błędu średniokwadratowego MSE (*mean squared error*) za pomocą metody LOOCV. Jaki otrzymano wynik?

Odpowiedzi

.....

Odp. a)

Zobacz podrozdział 5.1.3 w "An Introduction to Statistical Learning with Applications in R" - G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani, Springer, 2021.

.....

Odp. b)

Zobacz podrozdział 5.1.2 w "An Introduction to Statistical Learning with Applications in R" - G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani, Springer, 2021.

.....

Odp. c)

Zobacz podrozdział 5.1.4 w "An Introduction to Statistical Learning with Applications in R" - G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani, Springer, 2021.

.....

Odp. d)

$$CV_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{1 - h_i}\right)^2$$

$$CV_n = \frac{1}{5}\left(\left(\frac{1.78}{1-0.29}\right)^2 + \left(\frac{-1.30}{1-0.22}\right)^2 + \left(\frac{1.09}{1-0.80}\right)^2 + \left(\frac{-1.89}{1-0.23}\right)^2 + \left(\frac{0.32}{1-0.46}\right)^2\right) = 9.028$$

Zadanie 3.

a) (**2*p.***) Krótko przedstaw ideę uogólnionych modeli addytywnych (*Generalized Additive Models* – GAM). Wskaż dlaczego weszły do zestawu narzędzi aktuariusza.

b) (**1*p.***) Podaj definicję funkcji sklejanej stopnia 3 (splajnu kubicznego).

c) (**2*p.***) Liczbę roszczeń (zmienna *clm.count*) w pewnym portfelu ubezpieczeń AC modelowano z uwzględnieniem następujących zmiennych objaśniających:

driver.gender – płeć kierowcy (zmienna jakościowa: *Female*, *Male*),
driver.age – wiek kierowcy (zmienna ilościowa),
vehicle.age - wiek samochodu (zmienna ilościowa),
vehicle.value – wartość samochodu (zmienna ilościowa),
hp – moc silnika (zmienna ilościowa).

Oszacowano uogólniony model addytywny, w którym przyjęto rozkład Poissona dla liczby roszczeń oraz link logarytmiczny. Zinterpretuj uzyskane wyniki (podane poniżej). W interpretacji uwzględnij także wykresy przedstawione na rysunku 3.1.

Family: poisson
Link function: log

Formula:
clm.count ~ driver.gender + s(driver.age) + s(vehicle.age) + s(vehicle.value, hp) + offset(exposure)

Parametric coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(>|z|)
(Intercept)	-2.86959	0.07887	-36.382	< 2e-16 ***
driver.genderMale	-0.23469	0.08422	-2.787	0.00533 **

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

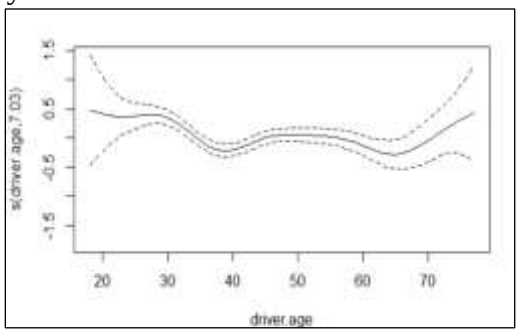
Approximate significance of smooth terms:

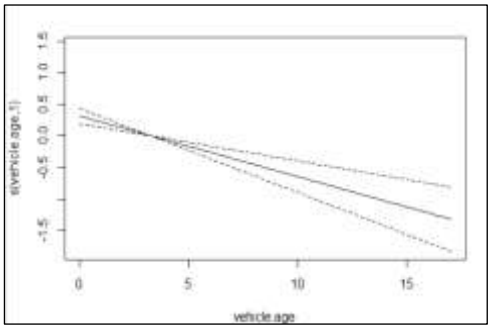
	edf	Ref.df	Chi.sq	p-value
s(driver.age)	7.026	8.014	43.38	< 2e-16 ***
s(vehicle.age)	1.001	1.002	26.86	2.41e-07 ***
s(vehicle.value,hp)	3.320	4.299	17.34	0.00224 **

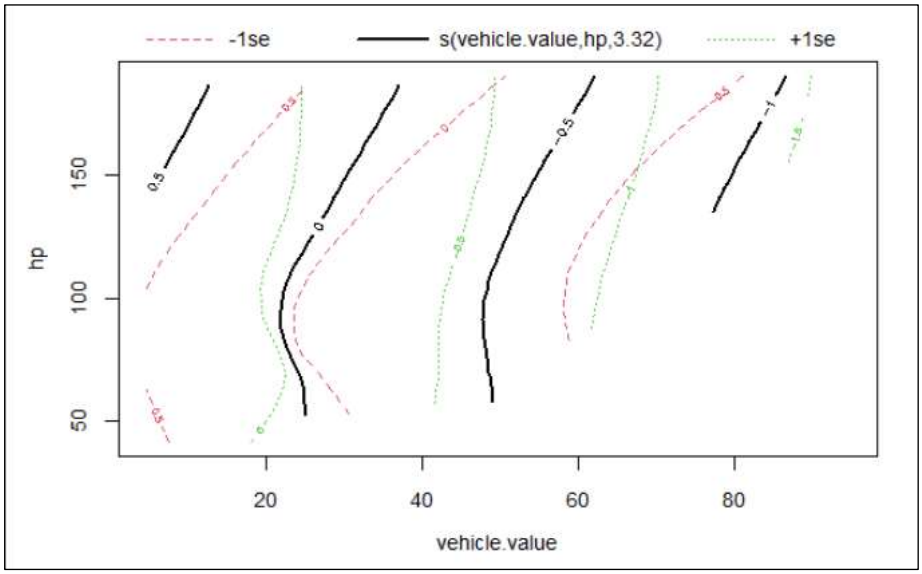
Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

R-sq.(adj) = 0.0264 Deviance explained = 1.66%
UBRE = -0.59697 Scale est. = 1 n = 14634

Rys. 3.1.







Odpowiedzi

.....

Odp. a)

Zobacz np.:

- Podrozdział 6.1 w: "Effective Statistical Learning Methods for Actuaries I" - M. Denuit, D. Hainaut, J. Trufin, Springer, 2019.
- Podrozdział 7.7 w "An Introduction to Statistical Learning with Applications in R" - G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani, Springer, 2021.

.....

Odp. b)

Zobacz np.:

- Podrozdział 6.3.2.2 w: "Effective Statistical Learning Methods for Actuaries I" - M. Denuit, D. Hainaut, J. Trufin, Springer, 2019.
- Podrozdział 7.4.3 w "An Introduction to Statistical Learning with Applications in R" - G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani, Springer, 2021.

.....

Odp. c)

W odpowiedzi należało omówić: część liniową modelu (zwracając uwagę na istotność parametrów), część nieliniową (zwracając uwagę na istotność wpływu poszczególnych splajnów na przewidywania modelu) oraz zidentyfikować nieliniowe zależności między zmiennymi objaśniającymi a zmienną zależną (na podstawie wykresów).

Zobacz podrozdział 6.4.2.2 w: “Effective Statistical Learning Methods for Actuaries I” - M. Denuit, D. Hainaut, J. Trufin, Springer, 2019.

Zadanie 4.

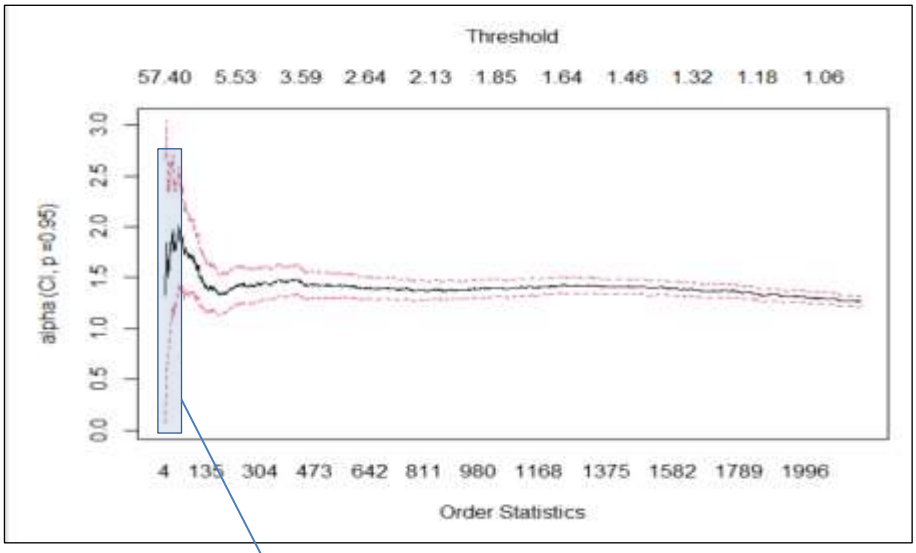
a) (**2*p.***) Krótko opisz podejście Hilla do modelowania ogonów rozkładów (m in. podaj założenia odnośnie rozkładów i przedstaw odpowiedni estymator).

b) (**1*p.***) Przedstaw konstrukcję wykresu Hilla (*Hill plot*) i wskaż w jakim celu jest wykorzystywany.

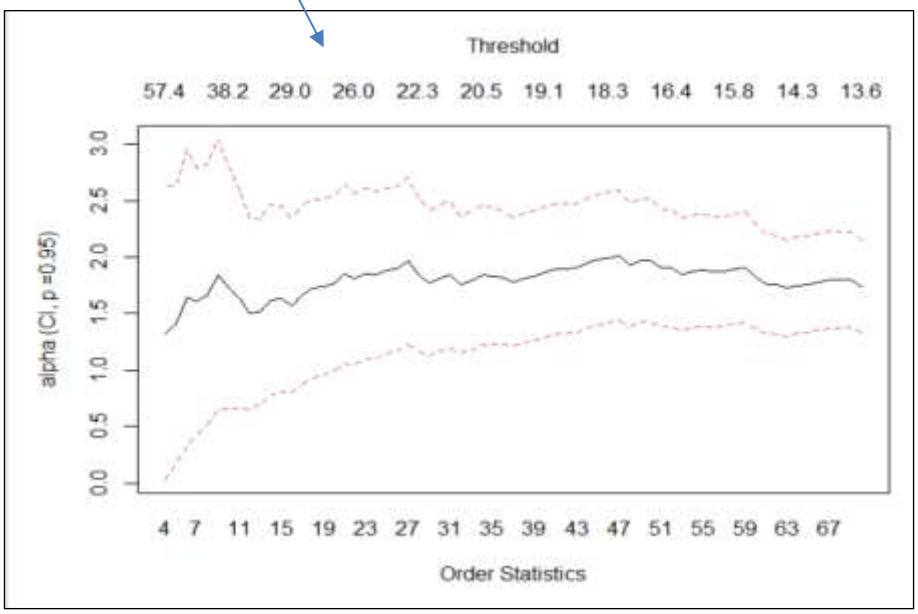
c) (**2*p.***) Analizowano straty pożarowe zarejestrowane przez Copenhagen Re. Na poniższym rysunku (Rys. 4.1.) przedstawiono skonstruowany na ich podstawie wykres Hilla (panel **B** przedstawia powiększony fragment zaznaczony na panelu **A**). Zinterpretuj otrzymane wyniki.

Rys. 4.1.

A



B



Odpowiedzi

.....

Odp. a)

Zobacz podrozdział 5.2.4 w: "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015

.....

Odp. b)

Zobacz podrozdział 5.2.4 w: "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015

.....

Odp. c)

W odpowiedzi należało wskazać, że przedstawione wykresy można wykorzystać do oceny indeksu ogona rozkładu α (*tail index*). W przypadku analizowanych danych można przyjąć, że α wynosi od 1,5 do 2, co sugeruje oszacowania dla ξ od 0,5 do 0,67, z których wszystkie odpowiadają rozkładom o nieskończonej wariancji dla strat pożarowych.

Zadanie 5.

a) (**2*p.***) Wymień etapy statystycznej analizy szeregów czasowych danych $y_1, y_2, \dots, y_t$. Krótko opisz jeden z nich.

b) (**2*p.***) Przedstaw sposób prognozowania szeregów czasowych za pomocą modeli ARMA. Podaj ogólne założenia i wskaż ideę.

c) (**1*p.***) Na podstawie szeregu czasowego liczącego 200 obserwacji oszacowano model ARMA(1,1). Uzyskano następujące wyniki:

```
Call:
arima(x = data, order = c(1, 0, 1), method = "ML")
Coefficients:
      ar1     ma1     intercept
   0.4039  0.5361  0.0393
s.e. 0.0788  0.0668  0.1866

sigma^2 estimated as 1.059:  log likelihood = -290,  aic = 588
```

Wartości rzeczywiste i oszacowane reszty $\hat{\varepsilon}_t$ dla 3 ostatnich obserwacji przedstawia tabela 5.1.

Tab. 5.1

t	*198*	*199*	*200*
x_t	1.17510868	-0.11635671	0.06456704
$\hat{\varepsilon}_t$	-0.6482727	-0.2668962	0.2312339

Wyznacz prognozę dla tego szeregu czasowego na okres $t = 202$.

Odpowiedzi

.....

Odp. a)

Zobacz podrozdział 4.1.4 w: "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015

.....

Odp. b)

Zobacz podrozdział 4.1.4 w: "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015

.....

Odp. c)

Prognoza na okres $t = 201$:

$$x_{201}^P = 0.0393 + 0.4039 \cdot (0.06456704 - 0.0393) + 0.5361 \cdot 0.2312339 = 0.1734699$$

Prognoza na okres $t = 202$:

$$x_{202}^P = 0.0393 + 0.4039 \cdot (0.1734699 - 0.0393) = 0.0934912$$

Zadanie 6.

a) (**2*p.***) Podaj definicję danych prawostronnie cenzurowanych (*right censoring*). Wskaż i omów co najmniej dwie sytuacje, w których aktuariusz analizuje tego typu dane.

b) Wykorzystując dane zwarte w tabeli 6.1, gdzie symbolem (*) oznaczono obserwacje cenzurowane z góry:

i. (**2*p.***) Skonstruuj estymator Kaplana–Meiera dla funkcji przeżycia $S(x)$.

ii. (**1*p.***) Oszacuj wariancję estymatora Kaplana–Meiera dla $S(2)$.

Tab. 6.1

1	2	3*	4	4	4*	4*	5	7*	8	8	8	9	9	9	9	10*	12	12	15*

Odpowiedzi:

.....

Odp. a)

Zobacz podrozdział 14.3 w: "Loss Models: From Data to Decisions", 5th edition - S.A. Klugman, H.H Panjer, G.E. Willmot, Wiley, 2019.

.....

Odp. b)

Ad. i

i	y_i	s_i	r_i	$\hat{S}_n(y_i)$
1	1	1	20	$1-\frac{1}{20}=0.950$
2	2	1	19	$0.950\cdot\left(1-\frac{1}{19}\right)=0.900$
3	4	2	17	$0.900\cdot\left(1-\frac{2}{17}\right)=0.794$
4	5	1	13	$0.794\cdot\left(1-\frac{1}{13}\right)=0.733$
5	8	3	11	$0.733\cdot\left(1-\frac{3}{11}\right)=0.533$
6	9	4	8	$0.533\cdot\left(1-\frac{4}{8}\right)=0.267$
7	12	2	3	$0.267\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)=0.089$

Ad. ii

$$\widehat{Var}(S_{20}(2))=0.900^2\cdot\left(\frac{1}{20\cdot 19}+\frac{1}{19\cdot 18}\right)=0.0045$$

Szczegóły Ad. i. oraz Ad. ii. w podrozdziale 14.3 w: "Loss Models: From Data to Decisions", 5th edition - S.A. Klugman, H.H Panjer, G.E. Willmot, Wiley, 2019.

Zadanie 7.
Przedstaw wytyczne Krajowego Standardu Aktuarialnego w zakresie stosowania modeli (tj. wyboru, tworzenia, modyfikowania i przeliczania modeli) dotyczące:

a) (**1*p.***) ryzyka modelu,
b) (**2*p.***) walidacji modeli,
c) (**2*p.***) wykorzystania wyników przebiegu modelu.

Odpowiedzi:

.....

Odp. a)

Zobacz podrozdział 2.10 w: „Krajowy Standard Aktuarialny Polskiego Stowarzyszenia Aktuariuszy – Praktyka Aktuarialna", 2022,

.....

Odp. b)

Zobacz podrozdział 2.10 w: „Krajowy Standard Aktuarialny Polskiego Stowarzyszenia Aktuariuszy – Praktyka Aktuarialna", 2022,

.....

Odp. c)

Zobacz podrozdział 2.10 w: „Krajowy Standard Aktuarialny Polskiego Stowarzyszenia Aktuariuszy – Praktyka Aktuarialna", 2022,

Zadanie 8.

a) (**3*p.***) Przedstaw ideę i sposób konstrukcji wykresów PDP (*Partial Dependence Plot*).

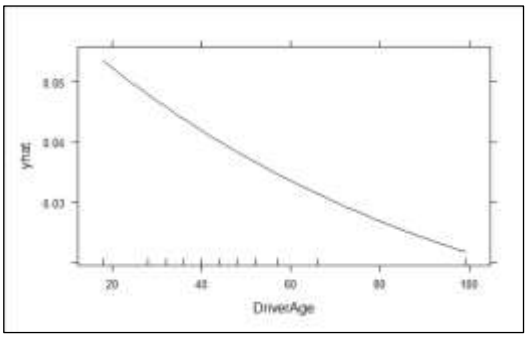
b) (**2*p.***) Liczbę roszczeń K_i w pewnym portfelu ubezpieczeń AC modelowano z uwzględnieniem następujących zmiennych objaśniających:

DriverAge – wiek kierowcy (w latach),
CarAge - wiek samochodu (w latach),
Brand – marka samochodu. Zmienna jakościowa przyjmująca następujące kategorie: *A, B, C, D, E, F* i *G*.

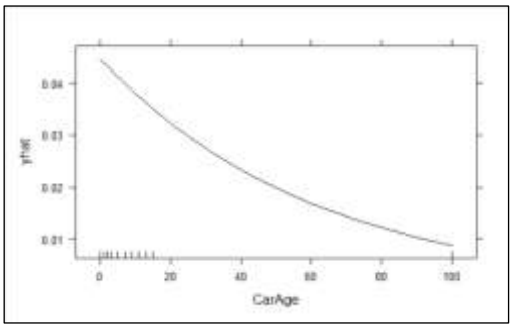
Oszacowano uogólniony model liniowy, w którym przyjęto rozkład Poissona dla K_i oraz link kanoniczny. Dla tego modelu skonstruowano wykresy PDP przedstawione na rysunku 8.1. Podaj interpretację tych wykresów.

Rys. 8.1

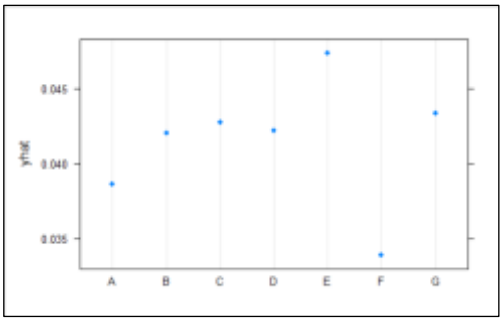
Wiek kierowcy



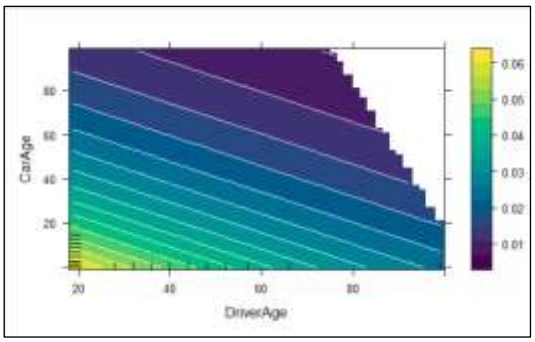
Wiek samochodu



Marka samochodu



Wiek kierowcy i samochodu



Odpowiedzi:

.....

Odp. a)

Zobacz podrozdział 4.6.2 w: “Effective Statistical Learning Methods for Actuaries II” - M. Denuit, D. Hainaut, J. Trufin, Springer, 2019.

.....

Odp. b)

W odpowiedzi należało wskazać:

- czy zmienne *DriverAge*, *CarAge* oraz *Brand* mają wpływ na prognozowaną liczbę roszczeń (na wynik modelu),
- czy zależność między określoną zmienną ilościową a prognozowaną liczbą roszczeń jest liniowa, nieliniowa,
- czy istnieją interakcje między zmiennymi.

Zadanie 9.

a) (***3p.***) Przedstaw ideę i konstrukcję testu ilorazu wiarygodności. Zapisz hipotezę zerową i alternatywną i wskaż czy różnią się one od hipotez (zerowej i alternatywnej) stawianych w testach zgodności (np. chi-kwadrat, Kołmogorowa-Smirnowa). Podaj postać statystyki testowej i jej rozkład.

b) (***2p.***) Wiadomo, że wysokość szkód w pewnym portfelu ubezpieczeń ma rozkład Pareto z parametrem $\alpha = 2$ i nieznanym parametrem θ. Z portfela wylosowano 20 szkód i oszacowano θ metodą największej wiarygodności, uzyskując wartość 7.0 ($\hat{\theta} = 7.0$). Następnie z wykorzystaniem testu ilorazu wiarygodności testowano hipotezę zerową H_0: $\theta = 3.1$. Wyznacz prawdopodobieństwo testowe (*p-Value*) dla tego testu.
Uwaga! $\sum_{i=1}^{20} \ln(x_i + 7.0) = 49.01$; $\sum_{i=1}^{20} \ln(x_i + 3.1) = 39.30$
Funkcja gęstości rozkładu Pareto ma postać: $f(x) = \frac{\alpha\theta^{\alpha}}{(x+\theta)^{\alpha+1}}$.

Odpowiedzi:

.....

Odp. a)

Zobacz podrozdział 15.4.4 w: "Loss Models: From Data to Decisions", 5th edition - S.A. Klugman, H.H Panjer, G.E. Willmot, Wiley, 2019.

.....

Odp. b)

Funkcja wiarygodności wynosi:

$$L(\alpha, \theta; x_i) = \frac{\alpha^{20}\theta^{20\alpha}}{\prod_{i=1}^{20}(x_i + \theta)^{\alpha+1}},$$

stąd logarytm wiarygodności jest równy:

$$l(\alpha, \theta; x_i) = 20\ln(\alpha) + 20\alpha\ln(\theta) - (\alpha + 1)\sum_{i=1}^{20}\ln(x_i + \theta)$$

Wartość statystyki testowej:

$$T = 2\left(l^{(H_1)} - l^{(H_0)}\right) = 2 \cdot \left(-55.3307 - (-58.7810)\right) = 6.901,$$

gdzie $l^{(H_0)}, l^{(H_1)}$- oznacza logarytm wiarygodności przy założeniu odpowiednio hipotezy zerowej i alternatywnej.

Statystyka T ma rozkład Chi-kwadrat z jednym stopniem swobody, zatem *p-Value* (odczytane z tabeli zamieszczonej na str.2) jest równe 0.0086.

Zadanie 10.

a) (**2*p.***) Wskaż co najmniej cztery reguły określające, kiedy węzeł w drzewie regresyjnym jest przyjmowany za końcowy (jest uznawany za liść).

b) (**1*p.***) Na czym polega i w jakim celu stosuje się przycinanie drzewa regresyjnego?

c) (**2*p.***) Liczbę roszczeń K_i w pewnym portfelu ubezpieczeń AC modelowano z uwzględnieniem następujących zmiennych objaśniających:

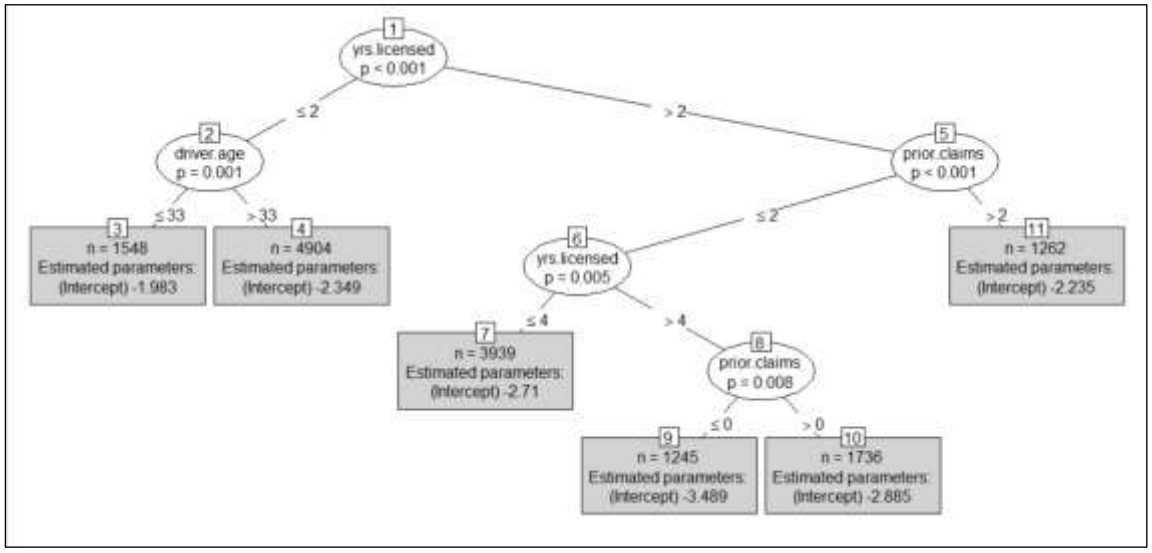
driver.age – wiek kierowcy w latach (zmienna ilościowa),

prior.claims – liczba wcześniej zgłoszonych roszczeń (zmienna ilościowa),

yrs.licensed – okres posiadania prawa jazdy w latach (zmienna ilościowa).

Przyjęto dla K_i rozkład Poissona i skonstruowano binarne drzewo GLM (*Generalized Linear Model Tree*) przedstawione na rysunku 10.1. Dla liści podano oszacowania modeli regresji Poissona z linkiem kanonicznym. Opisz grupę kierowców, która średnio rocznie zgłasza najwięcej szkód i grupę, która średnio rocznie zgłasza najmniej szkód. Oszacuj dla tych grup prawdopodobieństwa wystąpienia co najmniej jednego roszczenia.

Rys. 10.1



Odpowiedzi:

.....

Odp. a)

Zobacz podrozdział 3.2.3 w: "Effective Statistical Learning Methods for Actuaries II" - M. Denuit, D. Hainaut, J. Trufin, Springer, 2019.

.....

Odp. b)

Zobacz podrozdział 3.3 (wprowadzenie) w: "Effective Statistical Learning Methods for Actuaries II" - M. Denuit, D. Hainaut, J. Trufin, Springer, 2019.

.....

Odp. c)

Grupa kierowców, która średnio rocznie zgłasza:

- **najwięcej szkód**: posiadają prawo jazdy nie dłużej niż 2 lata i mają nie więcej niż 33 lata (niezależnie od liczby zgłoszonych wcześniej szkód).
  Dla tej grupy $\lambda = \exp(-1{,}983) = 0{,}13765565$, stąd prawdopodobieństwa wystąpienia co najmniej jednego roszczenia wynosi: **0,128601294**.

- **najmniej szkód**: posiadają prawo jazdy powyżej cztery lata i wcześniej nie zgłosili żadnej szkody (niezależnie od wieku).
  Dla tej grupy $\lambda = \exp(-3{,}489) = 0{,}030531388$, stąd prawdopodobieństwa wystąpienia co najmniej jednego roszczenia wynosi: **0,030070013**.

Sesja egzaminacyjna w dniu 13 czerwca 2023 r.

Modelowanie

Arkusz ocen

Zadanie nr	Punktacja
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	