

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXVIII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 12 czerwca 2023r.

**Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i
majątkowych**

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Ryzyka X_1 i X_2 są niezależne i mają rozkłady o dystrybuantach odpowiednio $F_1(x)$ oraz $F_2(x)$ o przebiegu podanym w tabeli

	$x < 0$	$x \in [0, 1)$	$x \geq 1$
$F_1(x)$	0	x	1
$F_2(x)$	0	$\frac{8}{10} + \frac{1}{10}x$	1

$\Pr\left(X_1 + X_2 \leq \frac{3}{2}\right)$ wynosi:

(A) $\frac{72}{80}$

(B) $\frac{73}{80}$

(C) $\frac{74}{80}$

(D) $\frac{75}{80}$ TAK

(E) $\frac{76}{80}$

Zadanie 2.

Zmienna losowa X jest sumą trzech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych Poisson z parametrami odpowiednio (λ_1, F_1) , (λ_2, F_2) , oraz (λ_3, F_3) .

Wartości parametrów częstotliwości $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, oraz dystrybuanty F_1, F_2, F_3 , dane są wzorami:

i	λ_i	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $x \in [1, 3)$	$F_i(x)$ dla $x \geq 3$
1	1/2	0	5/10	1
2	1	0	6/10	1
3	1/2	0	3/10	1

Wobec tego $\Pr(X = 4)$ wynosi:

(A) $\frac{13}{24}e^{-2}$

(B) $\frac{15}{24}e^{-2}$

(C) $\frac{22}{24}e^{-2}$

(D) $\frac{25}{24}e^{-2}$ TAK

(E) $\frac{26}{24}e^{-2}$

Zadanie 3.

Szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona o intensywności λ . Proces zastartował w momencie czasu $t = 0$. Niech T_n oznacza moment zajścia n -tej z kolei szkody, zaś $N(t)$ liczbę szkód, do których doszło do momentu t . Wobec tego warunkowa wartość oczekiwana:

$$E(T_2 - T_1 | N(1) = 2)$$

Wynosi:

(A) $1/4$

(B) $1/3$ TAK

(C) $1/2$

(D) $2/3$

(E) bez informacji o wartości parametru λ nie można udzielić odpowiedzi liczbowej

Zadanie 4.

Niech:

- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- T_1, T_2, \dots, T_N oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go, ..., N -tego, przy czym numeracja roszczeń od 1-go do N -tego jest całkowicie przypadkowa (porządek liczb T_1, T_2, \dots, T_N jest losowy)

Założmy, że:

- zmienne losowe N, T_1, T_2, T_3, \dots są niezależne,
- zmienne losowe T_1, T_2, T_3, \dots mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1 (jednostką pomiaru czasu jest miesiąc)
- zmienna losowa N ma rozkład geometryczny o funkcji prawdopodobieństwa:

$$\Pr(N = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Niech A oznacza zdarzenie, iż w ciągu pierwszego miesiąca od zajścia wypadku zgłoszono dokładnie jedno roszczenie, a więc iż dokładnie jedna liczba ze zbioru liczb $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$, jest mniejsza lub równa 1.

Prawdopodobieństwo, że z tego wypadku pojawią się jeszcze następne roszczenia:

$$\Pr(N > 1 | A)$$

Z dobrym przybliżeniem wynosi:

- (A) 0.427
- (B) 0.380
- (C) 0.334 TAK
- (D) 0.291
- (E) 0.250

Zadanie 5.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki z zerową nadwyżką początkową:

$U(t) = ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t ,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ ,
- wartości szkód Y_1, Y_2, Y_3 są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$.

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy tylko tyle, że:

- $\Pr(Y_1 \in [0, 10]) = 1$
- $E(Y_1) = 2$

Wiemy też, że $c > 2\lambda$.

Interesuje nas warunkowa wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny, pod warunkiem że do ruiny dojdzie. Informacje są nazbyt skąpe, aby ją wyznaczyć, można jednak określić przedział, który zawiera wszystkie jej możliwe wartości, i równocześnie nie zawiera nic ponadto. Ten przedział to:

(A) $[0, 5]$

(B) $[1, 5]$ TAK

(C) $[1, 10]$

(D) $[2, 5]$

(E) $[2, 10]$

Zadanie 6.

Łączna wartość szkód:

$$\bullet \quad X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N, \quad (X = 0 \text{ gdy } N = 0)$$

ma przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ warunkowy rozkład złożony Poissona z parametrami:

- oczekiwaną liczbą szkód równą λ ,
- rozkładem wartości pojedynczej szkody danym dla $x \geq 0$ dystrybuantą:
$$F_{Y|\Lambda=\lambda}(x) = 1 - \exp(-a \cdot \exp(\lambda) \cdot x)$$

Parametr ryzyka Λ ma w populacji ubezpieczonych rozkład Gamma(α, β), o gęstości:

$$\bullet \quad f_{\Lambda}(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x).$$

Przyjmijmy wartości parametrów zadania równe:

- $a = \frac{1}{11}$,
- $\alpha = 4, \beta = 10$

Wobec tego iloraz:

$$\bullet \quad \frac{E(X)}{E(N) \cdot E(Y)}$$

wynosi:

(A) 1

(B) $\frac{11}{12}$

(C) $\frac{10}{11}$ TAK

(D) $\frac{10}{12}$

(E) $\frac{9}{11}$

Zadanie 7.

Rozważamy model nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:

$U_n = u + X_1 + X_2 + \dots + X_n$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa (nieujemna);
- X_1, X_2, X_3, \dots są i.i.d, i reprezentują różnice pomiędzy wpływami ze składki a wydatkami na odszkodowania w kolejnych latach;
- rozkład zmiennej X_1 jest czteropunktowy:
 $\Pr(X_1 = 2) = p_2$,
 $\Pr(X_1 = 1) = p_1$,
 $\Pr(X_1 = 0) = p_0$,
 $\Pr(X_1 = -1) = 1 - p_0 - p_1 - p_2$.

Niech $N = \min\{n: U_n < 0\}$ oznacza czas ruiny.

Przyjmijmy, że parametry procesu wynoszą: $p_0 = 2/10$, $p_1 = 2/10$, $p_2 = 1/10$, oraz $u = 3$. W tych warunkach ruina jest pewna, a więc $\Pr(N < \infty) = 1$. Wobec tego oczekiwany czas do ruiny $E(N)$ jest wielkością dobrze określoną, i wynosi:

- (A) 24
- (B) 28
- (C) 32
- (D) 36
- (E) 40 TAK

Zadanie 8.

Każdy kierowca z pewnej populacji zgłasza szkody zgodnie z procesem Poissona, przy czym intensywność λ (roczna) charakteryzująca pojedynczego kierowcę jest w przekroju tej populacji zróżnicowana. Populacja jest zamknięta, a kierowcy migrują pomiędzy trzema klasami bardzo prostego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, łąduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Łąduje w klasie 2, o ile w danym roku był w klasie 1;
- Łąduje w klasie 3, o ile w danym roku był w klasie 2.

Rozkład wartości parametru λ w przekroju populacji jest rozkładem wykładniczym o gęstości danej na półosi dodatniej wzorem:

- $f(x) = \beta \exp(-\beta x)$, z parametrem równymi $\beta = 9$.

W celu skalkulowania składki adekwatnej dla osób przebywających w klasie drugiej liczymy warunkową wartość oczekiwaną:

- $E(N_3 | N_1 > 0, N_2 = 0)$,

gdzie N_3 to liczba szkód które zostaną zgłoszone w roku nadchodzącym, zaś N_2 oraz N_1 to odpowiednio liczba szkód w roku upływającym oraz rok wcześniej, a wszystkie trzy liczby dotyczą losowo wybranego kierowcy z tej populacji.

Owa warunkowa wartość oczekiwana wynosi:

- (A) 21/110 TAK
- (B) 1/11
- (C) 7/33
- (D) 19/90
- (E) 20/99

Zadanie 9.

Niech $X_{t,j}$ oznacza wartość szkód zaszyłych w roku t i zlikwidowanych w roku $(t + j)$, zaś $CX_{t,j} = \sum_{i=0}^j X_{t,i}$ odpowiednie wartości skumulowane. Zakładamy, iż likwidacja szkód zamyka się w okresie J lat, a więc iż dla $j > J$ wszystkie $X_{t,j}$ równają się zeru. Założenia o momentach pierwszych dwóch rzędów są następujące:

- $E(X_{t,j} | \mu_t) = r_j \mu_t$,
 - gdzie współczynniki rozkładu opóźnienia r_j są nieujemne i $\sum_{j=0}^J r_j = 1$
- $cov(X_{t,j}, X_{s,i} | \mu_t, \mu_s) = \begin{cases} r_j \sigma_t^2 & \text{jeśli } t = s \text{ oraz } i = j \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$
- $E(\mu_t) = \mu$
- $E(\sigma_t^2) = \sigma^2$
- $cov(\mu_t, \mu_s) = \begin{cases} a & \text{jeśli } t = s \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$

Znamy wartości parametrów:

- $(r_0, r_1, r_2) = \left(\frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}\right)$,
- $\mu = 1000$,
- $\sigma^2 = 10000$,
- $a = 10000$.

Kalkulację rezerwy na koniec 2002 roku na szkody zaistniałe w 2000 roku i do tej pory niezlikwidowane przeprowadzamy w oparciu o predyktor liniowy postaci:

$$Pred(CX_{2000,J} - CX_{2000,2} | CX_{2000,2}) = b_0 + b_1 CX_{2000,2}$$

Minimalizując błąd średniokwadratowy predyktora otrzymujemy wartości parametrów (b_0, b_1) równe:

- (A) $(b_0, b_1) = (250, 0.25)$ TAK
- (B) $(b_0, b_1) = (250, 0.15)$
- (C) $(b_0, b_1) = (625, 0.25)$
- (D) $(b_0, b_1) = (150, 0.15)$
- (E) $(b_0, b_1) = (625, 0.625)$

Zadanie 10.

Obserwujemy realizacje łącznej wartości szkód $X_{i,t}$ i -tego ubezpieczonego w t -tym roku dla $i = 1, 2, \dots, N, t = 1, 2, \dots, T; N > 2, T > 2$.

Nie znamy wartości następujących parametrów:

$$\begin{aligned}\mu(\Theta_i) &= E(X_{i,t} | \Theta_i), \\ \sigma^2(\Theta_i) &= \text{var}(X_{i,t} | \Theta_i), \\ \mu &= E[\mu(\Theta_i)], \\ s^2 &= E[\sigma^2(\Theta_i)], \\ a &= \text{var}[\mu(\Theta_i)],\end{aligned}$$

wiemy jednak, że jeśli $i \neq j$ lub $t \neq s$ to $\text{cov}(X_{i,t}, X_{j,s} | \Theta_i, \Theta_j) = 0$.

$$\text{Niech } \bar{X}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_{i,t}, \quad \bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_i.$$

Mamy dwa estymatory parametru a :

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{NT-1} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (X_{i,t} - \bar{X})^2 - \frac{1}{N(T-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (X_{i,t} - \bar{X}_i)^2,$$

oraz:

$$\hat{a}_2 = \max\{\hat{a}_1, 0\}.$$

$$\text{Niech } \text{MSE}(\hat{a}_i) = E[(\hat{a}_i - a)^2].$$

Wybierz zdanie prawdziwe:

- (A) oba estymatory są nieobciążone, $\text{VAR}(\hat{a}_1) < \text{VAR}(\hat{a}_2)$
- (B) oba estymatory są nieobciążone, $\text{VAR}(\hat{a}_1) > \text{VAR}(\hat{a}_2)$
- (C) $E(\hat{a}_1) < E(\hat{a}_2)$, $\text{VAR}(\hat{a}_1) < \text{VAR}(\hat{a}_2)$
- (D) $\text{VAR}(\hat{a}_2) < \text{VAR}(\hat{a}_1) < \text{MSE}(\hat{a}_2)$
- (E) $\text{VAR}(\hat{a}_2) < \text{MSE}(\hat{a}_2) < \text{VAR}(\hat{a}_1)$ TAK

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 12 czerwca 2023r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkuszu odpowiedzi*

Imię i nazwisko :KLUCZ ODPOWIEDZI.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	D	
2	D	
3	B	
4	C	
5	B	
6	C	
7	E	
8	A	
9	A	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna