

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXXVIII Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 12 czerwca 2023r.**

**Matematyka ubezpieczeń na życie**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

**Czas trwania egzaminu: 100 minut**

---

**Zadanie 1.**

Polskie tablice trwania życia publikowane przez GUS podają dla mężczyzny w wieku  $x = 55$  następujące dane:  $l_x = 89060$ ,  $d_x = 931$ ,  $d_{x+1} = 1015$ ,  $d_{x+2} = 1101$ .

Oblicz  ${}_3q_x$ . Podaj najbliższą wartość.

- (A) 0,0302
- (B) 0,0322
- (C) 0,0342
- (D) 0,0362
- (E) 0,0382

**Zadanie 2.**

Rozpatrujemy 40 letnie ubezpieczenie na życie i dożycie, z sumą ubezpieczenia 1. (Składki płacone są na początku każdego roku ubezpieczenia, natomiast świadczenia na koniec roku.) Dane są, stopa techniczna  $i = 4\%$  oraz:

$$A_{x:\overline{20}|}^1 = 0,03442$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 13,90684$$

$$A_{x:\overline{40}|} = 0,25198$$

Proszę podać ile wynosi rezerwa matematyczna netto  ${}_{20}V$ ? Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 0,33842
- (B) 0,36842
- (C) 0,39842
- (D) 0,42842
- (E) 0,45842

**Zadanie 3.**

Czterdziestolatek pochodzi z populacji de'Moivre'a, z wiekiem granicznym  $\omega = 100$ . Rozważmy 25 letnie ubezpieczenie na życie i dożycie. Składki w równej wysokości wpłacane są na początku każdego roku. Suma ubezpieczenia wypłacana z tytułu zgonu (na koniec roku, w którym nastąpił zgon) wynosi 200 000 złotych. W przypadku dożycia do końca okresu ubezpieczenia, zwracane są wszystkie składki brutto.

Do wyceny składki przyjmujemy: stopa techniczna  $i = 4\%$ ; narzut na koszty administracyjne 120 złotych rocznie; prowizja dla pośrednika 5% od każdej zapłaconej składki brutto.

Ile wynosi składka regularna brutto (wyrażona w złotych)? Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 6273
- (B) 6663
- (C) 6963
- (D) 7036
- (E) 7263

**Zadanie 4.**

Dwa życia,  $(x) = (40)$  oraz  $(y) = (50)$  pochodzą z populacji de'Moivre'a, z wiekiem granicznym  $\omega = 100$ . Zakładając, iż zmienne losowe  $T(X)$  oraz  $T(Y)$  są niezależne, proszę obliczyć prawdopodobieństwo  $P[T(X) < T(Y)]$  oraz wybrać jedną z poniższych odpowiedzi.

- (A)  $1/4$
- (B)  $5/12$
- (C)  $7/12$
- (D)  $3/4$
- (E) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawidłowa.

**Zadanie 5.**

W modelu ciągłym o stałym rocznym natężeniu śmiertelności  $\mu = 0,005$  oraz rocznym natężeniu oprocentowania  $\delta = 0,035$  rozważamy 20 letnie ubezpieczenie na życie i dożycie. Składka brutto opłacana jest w formie renty ciągłej z roczną intensywnością  $P = 2400$  złotych. W razie zgonu ubezpieczonego w chwili  $t$  wypłacana jest suma ubezpieczenia 150 000 złotych.

Składka brutto zawiera składkę netto oraz narzuty na:

- koszty administracyjne, których intensywność roczna wynosi 120 złotych;
- prowizję w wysokości 5% składki brutto;
- koszty zarządzania aktywami, ponoszone z intensywnością roczną 0,5% rezerwy matematycznej brutto;

Ile wynosi suma ubezpieczenia z tytułu dożycia? (Tj. ile wynosi rezerwa matematyczna brutto tuż przed wypłatą świadczenia z tytułu dożycia?). Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 38880 zł
- (B) 39390 zł
- (C) 39820 zł
- (D) 40840 zł
- (E) 41370 zł

**Zadanie 6.**

Dane są:

- natężenie oprocentowania  $\delta_t = \frac{2}{100} + \frac{2}{1000}t$ , dla  $0 \leq t \leq 10$ ;
- natężenie śmiertelności  $\mu_t = \frac{5}{1000} + \frac{1}{1000}t$ , dla  $0 \leq t \leq 10$ ;

Proszę obliczyć, jaka jest wartość obecna 10-letniej renty życiowej ciągłej, dla której strumień płatności określony jest jako  $b_t = 1200 \times e^{0,0015t^2}$  (dla  $0 \leq t \leq 10$ ).

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 10 617,6
- (B) 10 817,8
- (C) 11 017,0
- (D) 11 271,2
- (E) 11 471,4

**Zadanie 7.**

Rozważamy ubezpieczenie na całe życie ( $x$ ), ze stałą składką roczną  $P_x = 4975$  złotych płaconą z góry. Suma ubezpieczenia  $S_0$ , wypłacana jest na koniec roku zgonu.

Na koniec  $k$ -tego roku ubezpieczenia, zysk inwestycyjny z tej umowy, przekroczył zysk gwarantowany wynikający z poziomu stopy technicznej. Nadwyżka zysku (ponad ten wynikający ze stopy technicznej) ma być wykorzystana do zwiększenia świadczenia ubezpieczeniowego.

Zakład ubezpieczeń zaproponował ubezpieczonemu jednorazowe zwiększenie sumy ubezpieczenia oraz przyszłych składek o 4%. Alternatywnie, ubezpieczony może nadal opłacać składki w wysokości  $P_x$ , przy jednorazowym zwiększeniu sumy ubezpieczenia o  $w\%$ .

Wiedząc, że dla sumy ubezpieczenia  $S_0$  składka  $P_{x+k} = 13\,181,2$  złotych, proszę obliczyć współczynnik  $w\%$ . Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 2,27%
- (B) 2,38%
- (C) 2,49%
- (D) 2,60%
- (E) 2,71%



**Zadanie 8.**

Rozpatrujemy model ciągły, ze stałymi natężeniami śmiertelności oraz oprocentowania. Małżeństwo opłaca odroczoną o 30 lat rentę ciągłą, która po dożyciu obu małżonków do chwili  $t = 30$  wypłaca z intensywnością roczną 10 aż do drugiej śmierci. Renta ta opłacana jest w formie renty ciągłej, z roczną intensywnością  $P$  do chwili pierwszego zgonu.

Dodatkowo, jeśli w czasie  $t \leq 30$  nastąpi zgon męża, to żonie wypłacona zostanie jednorazowo kwota 400. Jeśli natomiast w czasie  $t \leq 30$  nastąpi zgon żony, to mężowi wypłacona zostanie jednorazowo kwota 300.

Dane są: natężenia śmiertelności męża i żony  $\mu^{(m)} = 0,02$ ;  $\mu^{(z)} = 0,01$  odpowiednio oraz roczne natężenie oprocentowania  $\delta = 0,03$ . Zakładając, iż zmienne losowe czasu zgonu męża oraz czasu zgonu żony są niezależne, proszę obliczyć  $P$ .

Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 11,31
- (B) 12,33
- (C) 13,35
- (D) 14,37
- (E) 15,39

**Zadanie 9.**

Rozpatrujemy dyskretne,  $n$ -letnie ubezpieczenie na życie i dożycie wystawione dla ( $x$ ), z sumą ubezpieczenia 150 000 złotych (płatną na koniec roku za zgon i dożycie) oraz roczną składką netto (płatną z góry). Na koniec roku  $k$  ubezpieczony dokonuje tak zwanej wypłaty częściowej, to znaczy wypłaca jednorazowo z rezerwy netto kwotę 40 000 złotych. Przy niezmienionej kwocie składki, proszę obliczyć ile wyniesie nowa suma ubezpieczenia na życie i dożycie. Proszę podać najbliższą wartość.

Dane są:

- $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 13,889$ ;  $\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} = 6,165$
- Stopa techniczna  $i = 4\%$ .

- (A) 91 576
- (B) 93 567
- (C) 95 576
- (D) 97 567
- (E) 99 576

**Zadanie 10.**

Rozpatrujemy bezkosztowy model ciągły, w którym  $(x) = (65)$  pochodzi z populacji de'Moivre'a, z wiekiem granicznym  $\omega = 105$ . Za swój prywatny kapitał emerytalny rozważa zakup renty życiowej lub renty życiowej z 10-letnim okresem gwarantowanym. Przyjmując, że natężenie oprocentowania  $\delta = 0,05$ , proszę (dla powyżej określonych umów rentowych) obliczyć różnicę rocznej intensywności świadczenia rentowego za każde 1000 złotych składki jednorazowej.

Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 6,24 zł
- (B) 6,48 zł
- (C) 6,62 zł
- (D) 6,82 zł
- (E) 6,96 zł

---

**Egzamin dla Aktuariuszy**  
**Sesja egzaminacyjna w dniu 12 czerwca 2023r.**

**Matematyka ubezpieczeń na życie**

**Arkuszu odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	A	
3	E	
4	B	
5	D	
6	A	
7	C	
8	D	
9	D	
10	B	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.