Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXVII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 23 stycznia 2022r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.
Ryzyka X_1 i X_2 są niezależne i mają identyczny rozkład:
z atomami:
$\Pr(X_1 = 0) = 0.7,$ i $\Pr(X_1 = 1) = 0.1,$
oraz gęstością: $f(x) = 0.4(1 - x)$ dla $x \in (0, 1)$

$\Pr(X_1 + X_2 > 1)$ wynosi:

(A) $\frac{16}{300}$

(B) $\frac{17}{300}$

(C) $\frac{18}{300}$

(D) $\frac{19}{300}$

(E) $\frac{20}{300}$

Zadanie 2.
Zmienna losowa X jest sumą trzech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych Poisson z parametrami odpowiednio (λ_1, F_1), (λ_2, F_2), oraz (λ_3, F_3). Wartości parametrów częstotliwości λ_1, λ_2, λ_3, oraz dystrybuanty F_1, F_2, F_3, dane są wzorami:

i	λ_i	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $x \in [1,2)$	$F_i(x)$ dla $x \geq 2$
1	3/2	0	7/10	1
2	1	0	8/10	1
3	1/2	0	3/10	1

Wobec tego $\Pr(X = 4)$ wynosi:

(A) $\frac{19}{6}e^{-3}$

(B) $\frac{17}{6}e^{-3}$

(C) $\frac{15}{6}e^{-3}$

(D) $\frac{13}{6}e^{-3}$

(E) $\frac{11}{6}e^{-3}$

Zadanie 3.

Proces pojawiania się szkód startuje w momencie $T_0 = 0$.

Niech T_n oznacza moment zajścia n-tej szkody. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \ldots$.

Likwidacja n-tej szkody następuje w momencie $T_n + D_n$.

Załóżmy, że zmienne losowe $T_1, D_1, (T_2 - T_1), D_2, (T_3 - T_2), D_3, \ldots$:

- są niezależne,
- mają taki sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej ½.

Niech $N(t)$ oznacza liczbę szkód zlikwidowanych do momentu t. Wobec tego oczekiwana liczba szkód zlikwidowanych na odcinku czasu $1 < t \leq 2$, a więc

$$\mathrm{E}[N(2) - N(1)]$$

Wynosi:

(A) 1.975

(B) 1.957

(C) 1.935

(D) 1.910

(E) 1.883

Zadanie 4.
Kierowca, którego charakteryzuje wartość q parametru ryzyka Q, zgłasza szkody (jedną lub więcej) w ciągu roku z prawdopodobieństwem q, zaś nie zgłasza szkód z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$, przy czym zdarzenia te w kolejnych latach są zdarzeniami niezależnymi. Rozkład parametru ryzyka Q w populacji kierowców jest na przedziale $(0, 1)$ dany gęstością:

$$f_Q(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1 - x)^{\beta-1}$$

Zakładamy, że populacja jest zamknięta (starzy kierowcy nie znikają, nowi się nie pojawiają). Kierowcy migrują pomiędzy klasami bardzo prostego, 4-klasowego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, ląduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Ląduje w klasie drugiej, o ile w danym roku był w klasie pierwszej;
- Ląduje w klasie trzeciej, o ile w danym roku był w klasie drugiej;
- Ląduje w klasie czwartej, o ile w danym roku był w klasie trzeciej lub czwartej.

Wiadomo, że rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni klas dla dowolnego kierowcy w takim systemie bonus-malus stabilizuje się (przestaje zależeć od klasy startowej) po upływie kilku pierwszych lat. Oznaczmy przez p_3 wartość oczekiwaną udziału kierowców przebywających w klasie czwartej w całkowitej liczebności kierowców w tej populacji, po osiągnięciu ww. stabilizacji.
Przyjmijmy, że parametry $(\alpha, \beta) = (2, 8)$. Wobec tego p_3 wynosi:

(A) $10/55$

(B) $9/55$

(C) $8/55$

(D) $7/55$

(E) $6/55$

Zadanie 5.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1
- $c = (1+\theta)\cdot\lambda, \quad \theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

- $L := \sup_{t>0}\{u - U(t)\}$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym:

- $L = l_1 + l_2 + \ldots + l_N, \qquad (L = 0$ gdy $N = 0)$,

gdzie składnik l_1 jest zmienną określoną w przypadku, gdy nadwyżka spadnie poniżej u, i równy jest wtedy:

- $l_1 = u - U(t_1)$, gdzie t_1 jest tym momentem czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Jeśli $\theta = 1/5$, oraz $u = 3$, to warunkowa wartość oczekiwana liczby takich spadków, pod warunkiem że nastąpiła ruina:

$$\mathrm{E}(N | L > u)$$

wynosi:

(A) 7

(B) $7\frac{1}{2}$

(C) 8

(D) $8\frac{1}{2}$

(E) 9

Zadanie 6.

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. N jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem częstotliwości λ, niezależną od zmiennych Y_i. Niech:

$$M = \begin{cases} \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\} & gdy \quad N > 0 \\ 0 & gdy \quad N = 0 \end{cases}$$

Warunkowa wartość oczekiwana $E(N|M)$ wynosi:

(A) $\begin{cases} \lambda \cdot M & gdy \quad M > 0 \\ 0 & gdy \quad M = 0 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} 1 + \lambda \cdot M & gdy \quad M > 0 \\ 0 & gdy \quad M = 0 \end{cases}$

(C) $1 + \lambda \cdot M$

(D) $e^{\lambda \cdot M}$

(E) $\begin{cases} e^{\lambda \cdot M} & gdy \quad M > 0 \\ 0 & gdy \quad M = 0 \end{cases}$

Zadanie 7.
W klasycznym modelu procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wypłat,
- proces $N(t)$ i pojedyncze wypłaty $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są niezależne.

Niech L oznacza maksymalną stratę, F_L jej dystrybuantę, zaś $\Psi(u)$ prawdopodobieństwo ruiny przy nadwyżce początkowej u. Wiadomo, że zachodzi:

$$F_L(u) = 1 - \Psi(u) = \Pr(\forall t \geq 0 \quad U(t) \geq 0).$$

Załóżmy, że wypłaty Y_i mają rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną μ, oraz iż parametr intensywności składki c wynosi $c = 110\%\lambda\mu$.

Wartość funkcji $\Psi(u)$ w punkcie $u = \mathrm{E}(L) + 1.645\sqrt{var(L)}$ wynosi:

(A) 7.8%

(B) 7.1%

(C) 6.3%

(D) 5.7%

(E) 5.2%

Zadanie 8.

Liczby szkód $N_1, \dots N_{10}, N_{11}$ w kolejnych latach są, dla ustalonej wartości parametru $Q = q$, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie dwumianowym z parametrami $(1, q)$, a więc przyjmują wartość 1 z prawdopodobieństwem q, zaś wartość 0 z prawdopodobieństwem $(1-q)$. Niech $N = N_1 + \dots + N_{10}$. Parametr ryzyka Q jest zmienną losową o gęstości na przedziale $(0, 1)$ określonej wzorem:

- $f_Q(x) = 4 \cdot (1-x)^3$.

Warunek konieczny i wystarczający na to, aby zachodziła nierówność:

- $\operatorname{var}(N_{11} | N_1, \dots, N_{10}) > \operatorname{var}(N_{11})$

jest postaci:

(A) $N > 0$

(B) $N > 1$

(C) $N > 2$

(D) $N > 3$

(E) $N > 4$

Zadanie 9.
W pewnej populacji każde ryzyko charakteryzuje się trzema parametrami q, b oraz v, o następującym znaczeniu:

- parametr q to prawdopodobieństwo, że do szkody dojdzie (może zajść co najwyżej jedna szkoda),
- jeśli już do szkody dojdzie, to rozkład jej wartości ma wartość oczekiwaną równą b i wariancję równą b^2v^2.

Parametr v^2 dla wszystkich ryzyk z populacji przyjmuje tę samą wartość równą $1/5$. Niejednorodność populacji znajduje wyraz w zróżnicowanych wartościach pozostałych dwóch parametrów. Wartości parametrów (q,b) losowo dobranego ryzyka z tej populacji to realizacja pary zmiennych losowych (Q,B), o której wiemy, że:

- $\mathrm{E}(Q) = 0.1$,
- $var(Q) = 0.01$,
- $var(B) = \frac{1}{4}[\mathrm{E}(B)]^2$,
- zmienne Q i B są niezależne.

Niech W_n oznacza łączną wartość szkód z portfela liczącego n ryzyk niezależnie wylosowanych z tej populacji. Liczba n, dla której zachodzi:

$$\frac{\sqrt{var(W_n)}}{\mathrm{E}(W_n)} = 0.1,$$

wynosi:

(A) 1400

(B) 1350

(C) 1300

(D) 1250

(E) 1200

Zadanie 10.
Ubezpieczyciel prowadzi dwa portfele ubezpieczeń. W obu portfelach pojedyncze ryzyko generuje szkody zgodnie ze złożonym procesem Poissona z taką samą intensywnością λ. Portfele różnią się rozkładem wartości pojedynczej szkody i liczbą ryzyk w portfelu (n_1 i n_2 odpowiednio). Stosunkowy narzut na składkę netto dla ryzyk w obu portfelach jest ten sam i wynosi θ. W rezultacie parametry modelu są następujące:

- <u>1 portfel:</u>

intensywność łączna $n_1\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 2\exp(-2y)$, składka za jedno ryzyko $\frac{1}{2}(1+\theta)\lambda$;

- <u>2 portfel:</u>

intensywność łączna $n_2\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 5\exp(-5y)$, składka za jedno ryzyko $\frac{1}{5}(1+\theta)\lambda$.

Jeśli wiemy, że funkcja prawdopodobieństwa ruiny ubezpieczyciela jest postaci:
$\Psi(u) = \frac{2}{3}\exp(-u) + \frac{1}{12}\exp\left(-\frac{5}{2}u\right), \quad u \geq 0,$
to wartości parametrów modelu $\left(\theta, \frac{n_1}{n_1+n_2}\right)$ wynoszą:

(A) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{7}\right)$

(B) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{21}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{21}\right)$

(D) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{21}\right)$

(E) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{7}\right)$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 23 stycznia 2023r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	A	
3	E	
4	E	
5	D	
6	B	
7	B	
8	C	
9	A	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.