

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXXVII Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 23 stycznia 2023r.**

**Matematyka finansowa**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

**Czas trwania egzaminu: 100 minut**

**Zadanie 1.**

Firma ABC, spodziewając się trudności ze spłatą trzech weksli:

- weksla o wartości nominalnej 2 000 zł, zapadającego 2 marca 2023;
- weksla o wartości nominalnej 3 000 zł, zapadającego 1 maja 2023;
- weksla o wartości nominalnej 4 000 zł, zapadającego 30 czerwca 2023;

zwraca się 1 stycznia 2023 roku do banku, który jest w posiadaniu wszystkich weksli, o ich zamianę na jeden weksel równoważny z terminem wykupu 1 stycznia 2024 roku.

Proszę określić jaka będzie wartość nominalna weksla równoważnego, jeśli stopa dyskontowa wynosi 11% (proszę podać najbliższą odpowiedź):

- (A) 9 600 zł
- (B) 9 700 zł
- (C) 9 800 zł
- (D) 9 900 zł
- (E) 10 000 zł

**Zadanie 2.**

Rozważmy 25-letni kredyt na kwotę 500 000 zł, oprocentowany w wymiarze 5% w skali roku, który spłacany jest równymi ratami, płatnymi na koniec kolejnych lat trwania kredytu.

Kredytobiorca ma możliwość dokonywania dodatkowych, wcześniejszych spłat częściowych kredytu, płatnych razem z ratą podstawową. Po każdej spłacie częściowej wyznaczana jest nowa rata kredytu, uwzględniająca pozostałe saldo kredytu oraz czas do końca kredytu.

Kredytobiorca rozważa strategię spłat częściowych, w których razem z każdą ratą spłacać będzie dodatkowo 10% salda kredytu, które pozostawałoby po płatności danej raty podstawowej.

Proszę określić o ile procent mniejsza będzie skumulowana kwota nominalnych odsetek, jakie zapłaci kredytobiorca stosując wspomnianą wyżej strategię wcześniejszych spłat, w stosunku do kwoty skumulowanych nominalnych odsetek w scenariuszu bez żadnych wcześniejszych wpłat częściowych.

- (A) 52%
- (B) 47%
- (C) 42%
- (D) 37%
- (E) 32%

**Zadanie 3.**

Rozważmy opcję kupna na niepłacącą dywidendy akcję, której cena w chwili  $t = 0$  wynosi 100 zł. Opcja wykonywana jest w chwili  $t = 1$ . Załóżmy, że współczynnik zmienności dla akcji wynosi  $\sigma = 15\%$ , podczas gdy stopa procentowa wolna od ryzyka  $r = 2\%$ . Cena wykonania opcji to 115 zł.

Inwestor A, chcąc kupić opcję wycenia ją w modelu CRR, w obliczeniach dzieląc czas do wykonania opcji na 4 podokresy. Niech  $P_A$  oznacza cenę opcji wyznaczoną przez tego inwestora we wzmiankowanym modelu.

Inwestor B, chcąc kupić tę samą opcję wycenia ją w modelu Jarrowa-Rudda, również dzieląc czas do wykonania opcji na 4 podokresy.  $P_B$  oznacza cenę opcji wyznaczoną przez tego inwestora we wzmiankowanym modelu.

Proszę wyznaczyć  $P_A - P_B$  (proszę podać najbliższą odpowiedź):

- (A) - 0.156
- (B) - 0.078
- (C) 0
- (D) 0.078
- (E) 0.156

**Zadanie 4.**

Założmy, że procesy  $X$  oraz  $Y$  mają dynamikę:

$$\frac{dX}{X} = a_X dt + b_X dW_X,$$

$$\frac{dY}{Y} = a_Y dt + b_Y dW_Y.$$

Wiedząc, że współczynnik korelacji  $dW_X$  oraz  $dW_Y$  wynosi  $\rho_{XY}$ , proszę określić jaka będzie dynamika procesu  $U := XY$ .

(A)  $\frac{dU}{U} = (a_X + a_Y + b_X b_Y \rho_{XY}) dt + b_X dW_X + b_Y dW_Y$

(B)  $\frac{dU}{U} = (a_X + a_Y + b_X b_Y) dt + \rho_{XY} (b_Y dW_X + b_X dW_Y)$

(C)  $\frac{dU}{U} = (a_X b_Y + a_Y b_X + b_X b_Y \rho_{XY}) dt + b_X dW_X + b_Y dW_Y$

(D)  $\frac{dU}{U} = (a_X b_Y + a_Y b_X + b_X b_Y \rho_{XY}) dt + \rho_{XY} (b_Y dW_X + b_X dW_Y)$

(E)  $\frac{dU}{U} = (a_X + a_Y) dt + \rho_{XY} (b_Y dW_X + b_X dW_Y)$

**Zadanie 5.**

Założmy, że inwestor obserwuje następujące ceny akcji  $\mathcal{A}$  na koniec poszczególnych giełdowych dni sesyjnych (zakładając 250 dni sesyjnych w ciągu roku):

Dzień	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
S	10.0	10.3	10.2	9.7	9.9	10.2	10.6	10.9	11.2	10.9	10.8

Wykorzystując powyższe informacje o zmienności ceny akcji  $\mathcal{A}$ , inwestor, korzystając z założeń modelu Blacka-Scholesa, wyznacza na koniec jedenastego dnia sesyjnego cenę opcji kupna na akcję  $\mathcal{A}$ , zapadającej za rok, o cenie wykonania 11. Przyjmując, że  $r = 2\%$ , proszę określić cenę opcji, jaką otrzyma inwestor (proszę podać najbliższą odpowiedź).

- (A) 1.8
- (B) 1.9
- (C) 2.0
- (D) 2.1
- (E) 2.2

**Zadanie 6.**

Niech  $T_0 = 0$ . Rozważmy rynek Blacka-Scholesa, na którym nie ma możliwości arbitrażu. Na rynku dostępne są niepłacące dywidendy akcje  $\mathcal{A}$  o cenie  $S_{T_0} = 100$  oraz europejskie opcje kupna na akcję  $\mathcal{A}$  o trzyletnim terminie realizacji. Parametr grecki *delta* (pochodna funkcji ceny opcji po cenie instrumentu bazowego) dla tej opcji wynosi 0.4512, a parametr grecki *rho* (pochodna funkcji ceny opcji po stopie wolnej od ryzyka) wynosi 126.9638. Proszę podać cenę europejskiej opcji kupna na akcję  $\mathcal{A}$  (proszę podać najbliższą wartość):

- (A) 2.6
- (B) 2.7
- (C) 2.8
- (D) 2.9
- (E) 3.0

**Zadanie 7.**

Rozważmy dwuletnią obligację korporacyjną o następujących parametrach:

- nominal  $N = 1000$  zł płatny jest po dwóch latach od momentu emisji;
- kupony  $K_i, i = 1, 2$  są zmienne i płatne w  $i$ -tą rocznicę emisji. Zależą one od stopy wolnej od ryzyka w następujący sposób  $K_i = r_i + 5\%$ , gdzie  $r_i$  oznacza stopę wolną od ryzyka w roku  $i$ ;
- w momencie emisji krzywa wolnych od ryzyka stóp forward jest następująca:  
 $r_1 = 2\%, r_2 = 3\%$ ;
- prawdopodobieństwo niewypłacalności emitenta w każdym roku wynosi 5%.  
W przypadku upadłości emitenta nie jest możliwe odzyskanie należnych płatności z obligacji;

Jakiego stałego narzutu na stopy wolne od ryzyka (używane do dyskontowania płatności z opisanej obligacji) należy użyć zamiast uwzględnienia prawdopodobieństwa niewypłacalności, aby uzyskać prawidłową wycenę tej obligacji w momencie emisji? Podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 5.1%
- (B) 5.2%
- (C) 5.3%
- (D) 5.4%
- (E) 5.5%



**Zadanie 8.**

Rok temu (w chwili  $t = 0$ ) firma A wzięła 5-letnią pożyczkę 1.8 mln USD ze stałym rocznym oprocentowaniem 3% płatnym corocznie na koniec roku. Jednocześnie, firma B wzięła 5-letnią pożyczkę 1.5 mln EUR ze stałym oprocentowaniem 2.8% płatnym corocznie na koniec roku. Firmy wymieniły się pożyczonymi kwotami oraz zawarły kontrakt *currency swap*, zgodnie z którym co roku wymieniają się płatnościami odsetkowymi, a na koniec 5-tego roku wymieniają się również pożyczonymi kwotami, tak, aby móc je zwrócić odpowiednim pożyczkodawcom. Jaki jest kurs USD do EUR w chwili  $t = 1$ , bezpośrednio po wymianie pierwszej płatności odsetkowej, jeżeli w tym momencie wartość kontraktu dla firmy A wynosi -160 tyś. USD i przy założeniu, że terminowa struktura stóp procentowych w USD jest płaska na poziomie 2.5% rocznie, a terminowa struktura stóp procentowych w EUR jest płaska na poziomie 2.2% rocznie. Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 1.2
- (B) 1.25
- (C) 1.3
- (D) 1.35
- (E) 1.4

**Zadanie 9.**

Na rynku międzybankowym dostępne są następujące kwotowania:

kupno (bid) – sprzedaż (ask) PLN/EUR 4.6733 – 4.7142.

Natomiast u dealera dostępne są następujące kwotowania:

- I) PLN/EUR 4.6349 – 4.6651
- II) PLN/EUR 4.6543 – 4.6932
- III) PLN/EUR 4.7205 – 4.7311.

Arbitraż jest możliwy:

- (A) tylko w przypadku I
- (B) tylko w przypadku II
- (C) tylko w przypadku III
- (D) tylko w przypadku I i III
- (E) we wszystkich trzech przypadkach

---

**Zadanie 10.**

Jeżeli:

- $\ddot{a}_{n+3} = 16.9904$ ,
- $\ddot{s}_{n+1} = 58.1094$ .

wówczas  $\bar{s}_1$  należy do przedziału:

- (A)  $[1, 1.015)$
- (B)  $[1.015, 1.02)$
- (C)  $[1.02, 1.025)$
- (D)  $[1.025, 1.03)$
- (E)  $[1.03, 1.035)$

**Dystrybuanta rozkładu normalnego  $N(0,1)$** 

<b>z</b>	<b>0.00</b>	<b>0.01</b>	<b>0.02</b>	<b>0.03</b>	<b>0.04</b>	<b>0.05</b>	<b>0.06</b>	<b>0.07</b>	<b>0.08</b>	<b>0.09</b>
<b>0.0</b>	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
<b>0.1</b>	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
<b>0.2</b>	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
<b>0.3</b>	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
<b>0.4</b>	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
<b>0.5</b>	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
<b>0.6</b>	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
<b>0.7</b>	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
<b>0.8</b>	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
<b>0.9</b>	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
<b>1.0</b>	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
<b>1.1</b>	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
<b>1.2</b>	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
<b>1.3</b>	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
<b>1.4</b>	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
<b>1.5</b>	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
<b>1.6</b>	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
<b>1.7</b>	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
<b>1.8</b>	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
<b>1.9</b>	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
<b>2.0</b>	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
<b>2.1</b>	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
<b>2.2</b>	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
<b>2.3</b>	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
<b>2.4</b>	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
<b>2.5</b>	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
<b>2.6</b>	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
<b>2.7</b>	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
<b>2.8</b>	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
<b>2.9</b>	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
<b>3.0</b>	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
<b>3.1</b>	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
<b>3.2</b>	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
<b>3.3</b>	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
<b>3.4</b>	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
<b>3.5</b>	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
<b>3.6</b>	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
<b>3.7</b>	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
<b>3.8</b>	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
<b>3.9</b>	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

**Egzamin dla Aktuariuszy**  
**Sesja egzaminacyjna w dniu 23 stycznia 2023r.**

**Matematyka finansowa**

**Arkuszu odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	A	
3	A	
4	A	
5	C	
6	C	
7	D	
8	C	
9	D	
10	C	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.