Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXVI Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 19 września 2022r.

Matematyka ubezpieczeń na życie

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Rozważamy model ciągły o stałym natężeniu śmiertelności. Wiadomo, że $q_x = 0{,}06$. Ile wynosi oczekiwana długość życia w przedziale domkniętym $[x, x+1]$?
(Innymi słowy, jaka jest wartość oczekiwana zmiennej losowej $Y = min(1, T)$?)
Proszę podać najbliższą wartość.

(A) 0,960

(B) 0,965

(C) 0,970

(D) 0,975

(E) 0,980

Zadanie 2.

30 letnie ubezpieczenie na życie (x), działa w następujący sposób. Przez pierwsze 20 lat opłacane jest na początku każdego roku składkami netto w rocznej wysokości P.
W przypadku zgonu osoby ubezpieczonej w ciągu pierwszych 10 lat, na koniec roku, w którym nastąpił zgon wypłacana jest suma ubezpieczenia w kwocie S. W przypadku zgonu osoby ubezpieczonej w ciągu następnych 10 lat, na koniec roku, w którym nastąpił zgon wypłacana jest suma ubezpieczenia w kwocie $\frac{2}{3}S$.
Po dożyciu do końca 20 roku ubezpieczenia, ochrona z tytułu śmierci wygasa, natomiast składki zwracane są w formie renty życiowej, w kwocie $2P$ na początku każdego roku ubezpieczenia (od 21 do 30).
Dane są następujące wielkości:

- $\ddot{a}_{x:\overline{10}|} = 8{,}3004$, $\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 13{,}2114$, $\ddot{a}_{x:\overline{30}|} = 15{,}5018$, $\ddot{a}_{x+10:\overline{10}|} = 7{,}7631$, $\ddot{a}_{x+20:\overline{10}|} = 6{,}8602$,
- stopa techniczna $i = 3\%$ oraz $S = 120\ 000$ zł.

Proszę obliczyć ile wynosi roczna składka netto P za to ubezpieczenie. Proszę podać najbliższą wartość.

(A) 3150

(B) 3170

(C) 3190

(D) 3210

(E) 3230

Zadanie 3.

Rozważmy 25-letnie terminowe ubezpieczenie na życie dla (x), ze składką płatną z góry, z częstotliwością roczną. (Suma ubezpieczenia oraz składka maleją „schodkowo” w każdym roku.) Zmienna losowa ${}_0L$, wyrażająca stratę zakładu ubezpieczeń na moment t = 0, określona jest następująco:

$$
{}_0L = \begin{cases} S \times \dfrac{(25-K)}{25} v^{K+1} - P \times (D\ddot{a})_{K+1} & K = k, \text{ z p-stwem } q(1-q)^k \text{ dla } k = 0,\ldots,24 \\ -P \times (D\ddot{a})_{25} & \text{z p-stwem } (1-q)^{25} \end{cases}
$$

gdzie, $(D\ddot{a})_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} (25-k) v^k$.

Dane są, stopa techniczna i = 2%, q = 0,004, S = 100000 oraz P = 20.
Proszę obliczyć wartość oczekiwaną wyżej określonej straty (E[${}_0L$]). Proszę podać najbliższą wartość.

(A) -1 170 zł

(B) -1 190 zł

(C) -1 210 zł

(D) -1 230 zł

(E) -1 250 zł

Zadanie 4.

Ubezpieczony (x) pochodzi z populacji de'Moivre'a, z wiekiem granicznym $\omega = 90$. Dane są $x = 40$, stopa techniczna $i = 2\%$ oraz roczna stopa indeksacji $j = 4\%$.

Ile wynosi $\ddot{a}_{x:\overline{25}|i^*} + (1 + j)^{25} \times {}_{25|}\ddot{a}_{x:\overline{25}|}$, gdzie $i^* = \frac{1+i}{1+j} - 1$?

Proszę podać najbliższą wartość.

(Powyższa renta, wypłaca na początku kolejnych lat: 1, 1+j, … , $(1+j)^{24}$, $(1+j)^{25}$, …, $(1+j)^{25}$, zgodnie z naturą renty życiowej pod warunkiem, że (x) żyje w chwili płatności.)

(A) 32,66

(B) 33,66

(C) 34,66

(D) 35,66

(E) 36,66

Zadanie 5.

Rozważmy odroczoną o 10 lat rentę płatną z góry dla życia (x), opłacaną przez 10 lat rocznymi składkami brutto P = 2715,7 złotych, na początku każdego roku. Jeśli w roku k = 1, … ,10, nastąpi zgon osoby ubezpieczonej, to wówczas na koniec roku zgonu wypłacana jest kwota świadczenia $k \times P$. Składka brutto P obejmuje wyłącznie składkę netto oraz koszty likwidacji świadczenia z tytułu zgonu, w kwocie 120 złotych.

Dane są:

- stopa techniczna i = 3%,
- q_x = 0,00266, q_{x+1} = 0,00291, q_{x+2} = 0,00315.

Ile wynosi składka za ryzyko (zawarta w składce brutto płatnej na początku 3. roku) $\pi_r(2)$? Proszę podać najbliższą wartość.

(A) -1,06

(B) -1,16

(C) -1,26

(D) -1,36

(E) -1,46

Zadanie 6.

Rozważmy 20-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie, z roczną składką regularną płatną z góry. Świadczenie ubezpieczeniowe płatne jest na koniec roku zgonu a w przypadku dożycia na koniec 20. roku. Suma ubezpieczenia na życie i dożycie wynosi 200 tysięcy złotych.

Do obliczenia składki brutto przyjęte zostały następujące założenia:

- $q_{x+k} = 0{,}003$ dla $k = 0, \ldots , 19$;
- stopa techniczna $i = 2\%$;
- roczne koszty administracyjne 60 zł (ponoszone na początku każdego roku);
- koszty likwidacji roszczenia z tytułu śmierci 100 zł;
- prowizja w 1. roku - 25% składki oraz prowizja naliczana od 2. roku - 5% składki;

W piątym roku ubezpieczenia, rzeczywista realizacja odpowiednich parametrów, odmienna od założeń przyjętych do obliczenia składki, przedstawiała się następująco:

- $q_{x+4} = 0{,}0015$ (tj. szkodowość wyniosła 50%);
- stopa zwrotu z aktywów wyniosła 3%;
- roczne koszty administracyjne (poniesione na początku 5. roku) oraz likwidacji roszczeń z tytuł śmierci wyniosły odpowiednio 76 zł oraz 120 zł.

Wiedząc, że (przy założeniach przyjętych do obliczenia składki) ${}_5V = 40\,373$ zł oraz ${}_6V = 49\,401$ zł, proszę podać jaki jest wynik techniczny z tej umowy w 5. roku. (Uwaga: Zakładamy, że umowa jest czynna na początku 5. roku ubezpieczenia, a rezerwy tworzone są w wysokości podanej powyżej.)

Proszę podać wartość najbliższą.

(A) 689

(B) 699

(C) 709

(D) 719

(E) 729

Zadanie 7.

Rozważmy 3-letnie ubezpieczenie na życie, ze stałą składką płatną z góry, z częstotliwością roczną. Ubezpieczenie obejmuje trzy stany:

1. zdrowia
2. trwałej i terminalnej choroby (TTC)
3. zgonu.

Stopa techniczna i = 0%, wektor stanu $s(0)$ = [1,0,0], natomiast macierz prawdopodobieństw $P(i,j)$ przejścia ze stanu i do j (dla i, j = 1, 2, 3) jest następująca:

$$[P(i,j)] = \begin{bmatrix} 0{,}985 & 0{,}005 & 0{,}010 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ubezpieczenie działa w następujący sposób:

- Ubezpieczony wpłaca składkę wyłącznie będąc w stanie 1.
- Jeśli ubezpieczony znajdował się na początku roku ubezpieczenia w stanie 1., i w ciągu tego roku nastąpił jego zgon, to świadczenie z tytułu zgonu, płatne na koniec tego roku wynosi 100 000 złotych.
- Jeśli ubezpieczony znajdował się na początku roku ubezpieczenia w stanie 1. natomiast w ciągu tego roku wystąpiła TTC, to świadczenie z tego tytułu, płatne na koniec tego roku wynosi 70 000 złotych („accelerated death benefit”). Po tej wypłacie ochrona z tytułu TTC kończy się. Jeśli w dalszym okresie ubezpieczenia, osoba ubezpieczona umrze (przejście ze stanu 2. do 3.), wypłacana jest (brakująca do pełnej sumy ubezpieczenia) kwota 30 000 złotych.

Ile wynosi roczna składka netto za to ubezpieczenie? Proszę podać najbliższą wartość (w złotych).

(A) 1 349

(B) 1 379

(C) 1 409

(D) 1 439

(E) 1 469

Zadanie 8.

W modelu ciągłym o stałym rocznym natężeniu śmiertelności $\mu = 0{,}01$ oraz rocznym natężeniu oprocentowania $\delta = 0{,}02$ rozważamy ubezpieczenie terminowe, ze składką jednorazową brutto P. W razie zgonu ubezpieczonego w chwili t wypłacana jest kwota $S + {}_tV$, gdzie S wynosi 120 000 złotych, natomiast ${}_tV$ jest rezerwą matematyczną brutto. Składka brutto zawiera składkę netto oraz narzut na koszty administracyjne, których intensywność roczna wynosi 240 złotych.

Dla jakiej składki P, termin tego ubezpieczenia wynosić będzie 25 lat? (Umowa ubezpieczenia wygasa w chwili $T(P) > 0$ gdy rezerwa matematyczna brutto ${}_{T(P)}V = 0$, tzn. $T(P)$ jest terminem tego ubezpieczenia).

Proszę podać najbliższą wartość w tysiącach złotych.

(A) 25,33

(B) 26,33

(C) 27,33

(D) 28,33

(E) 29,33

Zadanie 9.

Mąż (45) pochodzi z populacji de'Moivre'a, z wiekiem granicznym $\omega_m = 95$, natomiast żona (40) pochodzi z populacji de'Moivre'a, z wiekiem granicznym $\omega_k = 100$. Ubezpieczenie na całe życie w chwili pierwszej śmierci wypłaca kwotę S. Składka płacona jest do chwili pierwszej śmierci w formie renty ciągłej ze stałą intensywnością. Roczna intensywność oprocentowania $\delta = 0{,}02$. Ile wynosi rezerwa matematyczna netto ${}_{20}V$?

Proszę podać najbliższą wartość.

(A) $0{,}238 \times S$

(B) $0{,}258 \times S$

(C) $0{,}278 \times S$

(D) $0{,}298 \times S$

(E) $0{,}318 \times S$

Zadanie 10.

Zakładamy, że (x) pochodzi z populacji de'Moivre'a, z wiekiem granicznym ω, oraz zakładamy, że (y) pochodzi z populacji o stałym natężeniu śmiertelności μ. Oczekiwana długość przyszłego życia (y) jest dwukrotnie większa niż oczekiwana długość przyszłego życia (x). Zakładając, iż zmienne losowe $T(X)$ oraz $T(Y)$ są niezależne, proszę obliczyć prawdopodobieństwo $P[T(X) > T(Y)]$.

Podaj najbliższą odpowiedź.

(A) 0,357

(B) 0,368

(C) 0,377

(D) 0,387

(E) 0,398

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 19 września 2022r.

Matematyka ubezpieczeń na życie

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	C	
3	A	
4	A	
5	B	
6	B	
7	D	
8	D	
9	E	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.