

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXVI Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 19 września 2022r.

Matematyka finansowa

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Rozważmy model Blacka-Scholesa i funkcję $C(S_t, t, T - t, K, \sigma, r)$ ceny opcji kupna jako funkcję kluczowych parametrów – bieżącej ceny akcji oraz czasu, czasu pozostałego do realizacji opcji, ceny wykonania opcji, współczynnika zmienności i stopy procentowej wolnej od ryzyka. Rozważmy cenę opcji w chwili $t = 0$, zakładając, że $S_0 = s$.

Inwestor, analizując jak zmienia się cena opcji przy założeniu modyfikacji jednego z argumentów funkcji (przy założeniu, iż pozostałe się nie zmieniają), doszedł do następujących wniosków:

- Funkcja C jest malejąca jako funkcja zmiennej s .
- Funkcja C jest malejąca jako funkcja zmiennej K .
- Funkcja C jest rosnąca jako funkcja zmiennej $T - t$.
- Funkcja C jest rosnąca jako funkcja zmiennej σ .
- Funkcja C jest rosnąca jako funkcja zmiennej r .

Proszę stwierdzić ile z wniosków inwestora jest prawdziwych.

- (A) 5
- (B) 4
- (C) 3
- (D) 2
- (E) 1

Zadanie 2.

Rozważmy proces Z_t zadany następującym równaniem:

$$dZ_t = \sigma dB_t + a Z_t dt, \quad a, \sigma > 0,$$

gdzie B_t jest standardowym procesem Browna.

Zakładając, iż $Z_0 = 100$, $\sigma = 50\%$, $a = 0.025$ proszę podać najbliższą wartość dla oszacowania $P(Z_1 \leq 103)$.

- (A) 82.3 %
- (B) 86.3%
- (C) 90.3%
- (D) 94.3%
- (E) 98.3%

Zadanie 3.

Rozważmy 15-letnią inwestycję, w ramach której ulokowana została kwota 1 000 000 PLN na bankowym koncie inwestycyjnym gwarantującym stałe oprocentowanie roczne. Na końcu każdego roku z konta wypłacane są wszystkie należne odsetki, po czym niezwłocznie lokowane są w trzech funduszach inwestycyjnych F_1 , F_2 i F_3 , których stopy zwrotu są stałe i wynoszą odpowiednio: 4.00%, 4.25%, 4.50%.

Wiadomo, że alokacja środków do poszczególnych funduszy na końcu roku $k = 1, 2, \dots, 14$ jest następująca:

- F_1 – 25% środków,
- F_2 – $\frac{16-k}{30}$ środków pozostałych po alokacji do F_1 ,
- F_3 – reszta środków,

Po upływie 15 lat wszystkie należne środki wycofano i inwestycja została zakończona. Proszę obliczyć, jakie było oprocentowanie bankowego konta inwestycyjnego, wiedząc, że efektywna roczna stopa zwrotu z zainwestowanego kapitału w tej inwestycji wyniosła 3.83%. Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 3.40%
- (B) 3.50%
- (C) 3.60%
- (D) 3.70%
- (E) 3.80%

Zadanie 4.

Spółka z branży naftowej emituje 3-letnią obligację zerokuponową, która w momencie zapadalności wypłaci 1 000 EUR. Obligacja ta w momencie emisji jest wyceniana przez rynek na 950 EUR. W tym samym momencie spółka emituje analogiczną obligację zerokuponową, która dodatkowo wypłaci w momencie zapadalności premię zależną od kursu baryłki ropy. Premia ta jest pomnożoną przez 100 nadwyżką kursu baryłki ropy w momencie zapadalności ponad 90 EUR, przy czym nadwyżka kursu ograniczona jest do 10 EUR. Inwestor posiada następujące kwotowania wygasających za trzy lata europejskich opcji na baryłkę ropy:

Typ opcji:	Cena wykonania EUR	Cena opcji EUR
Kupna	90.00	14.20
Kupna	100.00	9.60
Sprzedży	90.00	11.70
Sprzedży	100.00	23.80

Jaką, co najwyżej, cenę jest skłonny zapłacić inwestor za obligację z premią? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 1 290 EUR
- (B) 1 320 EUR
- (C) 1 350 EUR
- (D) 1 380 EUR
- (E) 1 410 EUR

Zadanie 5.

Założmy, że linia lotnicza musi zakupić $1\,000(10 + (-1)^k)$ baryłek ropy na koniec miesiący $3k$ począwszy od chwili obecnej dla $k = 1, \dots, 8$. Aby zabezpieczyć się przed ryzykiem zmian ceny ropy linia lotnicza zakupuje kontrakt *swap*, na mocy którego linia lotnicza będzie płaciła stałą cenę za baryłkę ropy – c – w momentach jej dostawy. Proszę wyznaczyć c (podać najbliższą odpowiedź) zakładając dla $k = 1, \dots, 8$ poniższe ceny *forward* na baryłkę ropy ($F_{0,3k}$) oraz ceny obligacji zerokuponowych o nominałach 100 i terminie wykupu za $3k$ miesiący ($B_{0,3k}$):

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_{0,3k}$	81.00	82.38	83.95	85.66	87.48	89.39	91.39	93.45
$B_{0,3k}$	0.987	0.976	0.963	0.95	0.941	0.923	0.911	0.903

Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 86.40
- (B) 86.50
- (C) 86.60
- (D) 86.70
- (E) 86.80

Zadanie 6.

Założmy, że do modelowania krótkoterminowej stopy procentowej wykorzystywany jest model Mertona, gdzie:

$$r_t = r_0 + at + \sigma B_t, \quad r_0, a, \sigma > 0,$$

gdzie B_t jest standardowym procesem Browna.

Wówczas cena obligacji zerokuponowej dana jest wzorem:

(A) $B(t, T) = \exp\left\{-r_t(T-t) + \frac{1}{2}a(T-t)^3 - \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^2\right\}$

(B) $B(t, T) = \exp\left\{-r_t(T-t) - \frac{1}{2}a(T-t)^3 - \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^2\right\}$

(C) $B(t, T) = \exp\left\{-r_t(T-t) - \frac{1}{2}a(T-t)^2 - \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3\right\}$

(D) $B(t, T) = \exp\left\{-r_t(T-t) + \frac{1}{2}a(T-t)^2 - \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3\right\}$

(E) $B(t, T) = \exp\left\{-r_t(T-t) - \frac{1}{2}a(T-t)^2 + \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3\right\}$

Zadanie 7.

Rozważmy model Blacka, w którym dynamika ceny *futures* $f_t = f_S(t, T)$ przy ustalonej dacie T wygaśnięcia kontraktu, jest opisana stochastycznym równaniem różniczkowym:

$$df_t = \mu f_t dt + \sigma f_t dB_t, \quad \mu, \sigma > 0,$$

gdzie B_t jest standardowym procesem Browna.

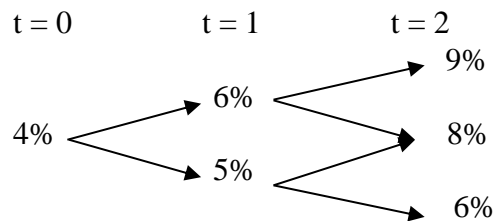
Przyjmijmy, że w dowolnej chwili portfel zabezpieczający sprzedaną opcję kupna *futures* zawiera α_t kontraktów futures oraz β_t jednostek pieniężnych umieszczonych na rachunku bankowym.

Wiedząc, że $\mu = 10\%$, $\sigma = 25\%$, $T = 3$, $f_1 = 1$ oraz $K = 1.2$, proszę wyznaczyć (α_1, β_1) . Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) $(\alpha_1, \beta_1) = (0.20, 0.10)$
- (B) $(\alpha_1, \beta_1) = (0.25, 0.08)$
- (C) $(\alpha_1, \beta_1) = (0.30, 0.06)$
- (D) $(\alpha_1, \beta_1) = (0.35, 0.04)$
- (E) $(\alpha_1, \beta_1) = (0.40, 0.02)$

Zadanie 8.

Założmy, że zmiany w czasie stóp procentowych opisuje poniższe drzewo dwumianowe, oraz że prawdopodobieństwa neutralne względem ryzyka (*risk neutral*) w każdym z węzłów drzewa wynoszą po 50% dla obu gałęzi:



Rozważmy trzyletnią obligację o nominale równym 100 PLN i rocznym kuponie 7%, z opcją wykupu przez emitenta w $t = 1$ po cenie 101 PLN (po płatności kuponu), którą emitent wykona zawsze, gdy będzie to dla niego korzystne. Jaka jest wartość tej opcji wykupu w $t = 0$ dla emitenta? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 0.438
- (B) 0.538
- (C) 0.638
- (D) 0.738
- (E) 0.838

Zadanie 9.

Niech natężenie oprocentowania (*force of interest*) w chwili t wynosi:

$$\delta_t = \begin{cases} 0,03 + 0,004t^2 & \text{dla } 0 < t \leq 5 \\ 0,01 + 0,024t & \text{dla } t > 5 \end{cases}$$

Ile wynosi wartość w $t = 0$ strumienia ciągłych wpłat o stopie intensywności $\mu_t = 100\exp(0,012t^2)$, następujących począwszy od $t = 8$ do $t = 11$? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 252
- (B) 262
- (C) 272
- (D) 282
- (E) 292

Zadanie 10.

Inwestor w $t = 0$ sprzedaje trzymiesięczny kontrakt futures na jedną akcję spółki X po cenie 980. Załóżmy, że cenę tego kontraktu na koniec kolejnych miesięcy prezentuje poniższa tabela:

t (miesiące)	cena futures
1	1010
2	970
3	1020
4	1005

Założmy, że początkowy depozyt zabezpieczający (*margin*) wynosi 0, ale raz w miesiącu, na koniec miesiąca, wykonywane są bieżące rozrachunki rynkowe – równanie do rynku (*marking to markets*). Ile wynosi wartość depozytu inwestora na koniec 3 miesiąca, jeśli depozyt jest oprocentowany w sposób ciągły roczną stopą 8%? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) -25.80
- (B) -25.40
- (C) -25.00
- (D) 25.40
- (E) 25.80

Dystrybuanta rozkładu normalnego $N(0,1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 19 września 2022r.

Matematyka finansowa

Arkuszu odpowiedzi*

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	A	
3	D	
4	E	
5	E	
6	E	
7	C	
8	A	
9	D	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.