Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXVI Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 19 września 2022r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Ryzyko X ma rozkład z atomami: $\Pr(X = 0) = 0.7$
$\Pr(X = 1) = 0.1$
i gęstością: $f_X(x) = 0.2$ dla $x \in (0, 1)$

Ryzyko Y ma rozkład z atomami: $\Pr(Y = 0) = 0.7$
$\Pr(Y = 2) = 0.1$
i gęstością: $f_Y(x) = 0.1$ dla $x \in (0, 2)$

Jeśli X i Y są niezależne, to $\Pr(X + Y > 2)$ wynosi:

(A) 0.050

(B) 0.055

(C) 0.060

(D) 0.065

(E) 0.070

Zadanie 2.
Dla pewnego ryzyka wartość pojedynczej szkody ma rozkład określony na zbiorze liczb naturalnych (bez zera), a łączna wartość szkód X ma złożony rozkład Poissona. Składka netto za nadwyżkę łącznej szkody X ponad k dla wybranych wartości k wynosi:

k	5	6	8	9
$E[(X-k)_+]$	0.285	0.203	0.091	0.054

Prawdopodobieństwo, iż łączna wartość szkód X wyniesie 6, 7 lub 8 wynosi:

(A) 0.231

(B) 0.194

(C) 0.149

(D) 0.112

(E) 0.045

Zadanie 3.
W pewnym rodzaju ubezpieczenia każde ryzyko generuje szkodę (co najwyżej jedną) z takim samym prawdopodobieństwem. Ryzyka generują szkody o wartościach będących dodatnimi zmiennymi losowymi o gęstościach wykładniczych:
$f_{Y|B=\beta}(y) = \beta e^{-\beta y}, \quad y > 0$
Populacja ryzyk charakteryzuje się jednak dużym zróżnicowaniem skali tych ryzyk, reprezentowanej przez parametr β rozkładu.
Jeśli przyjmiemy, iż rozkład parametru skali w populacji ryzyk ma na półosi dodatniej gęstość:
$g_B(\beta) = \beta e^{-\beta}, \quad \beta > 0$
to dla losowo dobranego ryzyka z populacji, prawdopodobieństwo iż wartość szkody przekroczy 10 (o ile do szkody dojdzie) wynosi w przybliżeniu:

(A) 0.0909

(B) 0.0165

(C) 0.0083

(D) 0.0015

(E) 0.0008

Zadanie 4.
Niech T_n oznacza moment zajścia n-tej szkody, w procesie pojawiania się szkód, który startuje w momencie $T_0 = 0$. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \dots$.
Likwidacja n-tej szkody następuje w momencie $T_n + D_n$.
Załóżmy, że zmienne losowe $T_1, D_1, (T_2 - T_1), D_2, (T_3 - T_2), D_3, \dots$, są niezależne, przy czym:
- $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \dots$ mają taki sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1/200;
- $D_1, D_2, D_3, \dots$ mają taki sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1.
- Jednostką pomiaru czasu jest rok.

Niech N_0 oznacza liczbę szkód zaszłych i zlikwidowanych w ciągu pierwszego roku, zaś N_1 liczbę szkód zaszłych w ciągu pierwszego roku, i na koniec tego roku wciąż oczekujących na likwidację.
Wobec tego $cov(N_1, N_0)$ wynosi:

(A) 126.4

(B) 73.6

(C) 46.6

(D) 23.3

(E) 0.0

Zadanie 5.
Likwidacja szkody zaistniałej w roku t następuje w tym samym roku z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, a w roku $(t+k)$ z prawdopodobieństwem danym dla każdego $k = 1,2,3,\ldots$ wzorem $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.
Wartość każdej szkody wynosi 1.
W latach 2019, 2020 i 2021 zaistniało odpowiednio 180, 210 oraz 240 szkód.
Wyznacz stan rezerwy szkodowej na koniec roku 2021, jeśli stan tej rezerwy na początek roku 2019 wynosił 240.

(A) 280

(B) 290

(C) 300

(D) 310

(E) 320

Zadanie 6.
W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym nadwyżka początkowa wynosi $2\frac{1}{2}$, składka roczna wynosi 1, zaś łączne wartości szkód w kolejnych latach $W_1, W_2, W_3, \ldots$ to niezależne zmienne losowe o identycznym rozkładzie danym wzorem:
$Pr(W_1 = k) = (1-q)q^k, \quad k = 0,1,2, \ldots,$
gdzie $q < \frac{1}{2}$.

Prawdopodobieństwo ruiny w tym modelu dane jest wzorem:

(A) $\left(\frac{q}{1-q}\right)^{2.5}$

(B) $\left(\frac{q}{1-q}\right)^{3}$

(C) $\left(\frac{q}{1-q}\right)^{3.5}$

(D) $\left(\frac{q}{1-q}\right)^{4}$

(E) $\left(\frac{q}{1-q}\right)^{4.5}$

Zadanie 7.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela, a więc proces:

$$U(t) = u + (1+\theta)\lambda\mu_Y t - S_{N(t)}, \text{ gdzie:}$$

- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ (lub zero, jeśli $n = 0$)
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie danym na półosi dodatniej gęstością: $f_Y(y) = \frac{\alpha v^{\alpha}}{(v+y)^{\alpha+1}}$.

Parametry procesu wynoszą:

- $\alpha = 2$, $v = 3$ oraz $\theta = \frac{1}{5}$.

Wiemy że prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u)$ jest funkcją nadwyżki początkowej u. Wiadomo, że dla odpowiednio dobranych parametrów a, b, c funkcja ta spełnia zależność:

$$\lim_{u\to\infty} \Psi(u)(1+au)^{b} = c$$

Parametry tej zależności wynoszą:

(A) $(a,b,c) = \left(\frac{1}{3}, 1, 5\right)$

(B) $(a,b,c) = (1, 2, 5)$

(C) $(a,b,c) = (3, 1, 5)$

(D) $(a,b,c) = \left(\frac{1}{3}, 2, 5\right)$

(E) $(a,b,c) = (3, 2, 5)$

Zadanie 8.
W pewnym ubezpieczeniu liczba szkód, które w ciągu t lat wygeneruje ubezpieczony charakteryzujący się wartością λ parametru ryzyka Λ jest procesem Poissona o intensywności λ (rocznie).
Zakładamy, że rozkład wartości parametru ryzyka Λ w populacji wszystkich ubezpieczonych (tak naszych, jak i tych, którzy ubezpieczają się u konkurentów) dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_{\Lambda}(\lambda) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda)$, gdzie $(\alpha, \beta) = (2, 6)$

Załóżmy, że w pierwszym roku tak nasza firma, jak i firmy konkurencyjne proponowały wszystkim ubezpieczenie w zamian za tę samą składkę. W drugim roku nasza firma kontynuuje praktykę z roku poprzedniego, natomiast konkurenci wprowadzili składki niższe od przeciętnej za bezszkodowy przebieg ubezpieczenia w pierwszym roku, zaś wyższe od przeciętnej odpowiednio dla ubezpieczonych, którzy mieli w pierwszym roku szkody. Zakładając, że wszyscy ubezpieczeni wybiorą tego ubezpieczyciela, który jest dla nich tańszy, oczekiwana częstotliwość szkód w drugim roku (w przeliczeniu na jednego ubezpieczonego) w naszej firmie wzrośnie w stosunku do pierwszego roku o:

(A) ponad 46%

(B) wskaźnik mieszczący się pomiędzy 42% a 46%

(C) wskaźnik mieszczący się pomiędzy 38% a 42%

(D) wskaźnik mieszczący się pomiędzy 34% a 38%

(E) mniej niż 34%

Zadanie 9.
Niech N oznacza liczbę szkód zaszłych w ciągu roku z pewnego ubezpieczenia, z czego:

- N_0 to liczba szkód zgłoszonych przed końcem tego roku
- N_1 to liczba szkód które zostaną zgłoszone w ciągu lat następnych.

Oczywiście zachodzi $N = N_0 + N_1$.
Wiadomo, że zmienne N_0 oraz N_1 są warunkowo (przy ustalonej wartości parametru ryzyka Λ) niezależne i mają rozkłady Poissona z parametrami odpowiednio:

- Λq - zmienna N_0,
- Λp - zmienna N_1,

gdzie $p = 1 - q$ to liczba z przedziału $(0, 1)$.
O parametrze ryzyka Λ wiadomo, że:

- ma rozkład Gamma o wartości oczekiwanej $\frac{\alpha}{\beta}$ i wariancji $\frac{\alpha}{\beta^2}$

Oczekiwana liczba szkód zaszłych w ciągu roku pod warunkiem, że do końca roku zgłoszono n szkód, a więc:

$$E(N|N_0 = n)$$

wynosi:

(A) $n + \frac{\alpha+np}{\beta+q}$

(B) $n + \frac{\alpha+np}{\beta q+q}$

(C) $n + \frac{\alpha p+np}{\beta q+q}$

(D) $n + \frac{\alpha p+np}{\beta+q}$

(E) $n + \frac{\alpha+n}{\beta+q}$

Zadanie 10.
Ubezpieczyciel prowadzi dwa portfele ubezpieczeń. W obu portfelach pojedyncze ryzyko generuje szkody zgodnie ze złożonym procesem Poissona z taką samą intensywnością λ. Portfele różnią się rozkładem wartości pojedynczej szkody i liczbą ryzyk w portfelu (n_1 i n_2 odpowiednio). Stosunkowy narzut na składkę netto dla ryzyk w obu portfelach jest ten sam i wynosi θ. W rezultacie parametry modelu są następujące:

- 1 portfel:

intensywność łączna $n_1\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 2\exp(-2y)$, składka za jedno ryzyko $\frac{1}{2}(1+\theta)\lambda$;

- 2 portfel:

intensywność łączna $n_2\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 5\exp(-5y)$, składka za jedno ryzyko $\frac{1}{5}(1+\theta)\lambda$.

Jeśli wiemy, że funkcja prawdopodobieństwa ruiny ubezpieczyciela jest postaci:
$\Psi(u) = \frac{2}{3}\exp(-u) + \frac{1}{12}\exp\left(-\frac{5}{2}u\right), \quad u \geq 0,$
to wartości parametrów modelu $\left(\theta, \ \frac{n_1}{n_1+n_2}\right)$ wynoszą:

(A) $\left(\frac{2}{3}, \ \frac{1}{7}\right)$

(B) $\left(\frac{2}{3}, \ \frac{2}{21}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{3}, \ \frac{1}{21}\right)$

(D) $\left(\frac{1}{3}, \ \frac{2}{21}\right)$

(E) $\left(\frac{1}{3}, \ \frac{1}{7}\right)$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 19 września 2022r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	E	
3	C	
4	E	
5	B	
6	D	
7	A	
8	C	
9	D	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna

.