Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXVI Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 20 września 2022 r.

Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 120 minut

Uwagi

Wartości dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego N(0,1):

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0,01	0,503989	0,41	0,659097	0,81	0,79103	1,21	0,886861	1,61	0,946301	2,01	0,977784	2,41	0,992024
0,02	0,507978	0,42	0,662757	0,82	0,793892	1,22	0,888768	1,62	0,947384	2,02	0,978308	2,42	0,99224
0,03	0,511966	0,43	0,666402	0,83	0,796731	1,23	0,890651	1,63	0,948449	2,03	0,978822	2,43	0,992451
0,04	0,515953	0,44	0,670031	0,84	0,799546	1,24	0,892512	1,64	0,949497	2,04	0,979325	2,44	0,992656
0,05	0,519939	0,45	0,673645	0,85	0,802337	1,25	0,89435	1,65	0,950529	2,05	0,979818	2,45	0,992857
0,06	0,523922	0,46	0,677242	0,86	0,805105	1,26	0,896165	1,66	0,951543	2,06	0,980301	2,46	0,993053
0,07	0,527903	0,47	0,680822	0,87	0,80785	1,27	0,897958	1,67	0,95254	2,07	0,980774	2,47	0,993244
0,08	0,531881	0,48	0,684386	0,88	0,81057	1,28	0,899727	1,68	0,953521	2,08	0,981237	2,48	0,993431
0,09	0,535856	0,49	0,687933	0,89	0,813267	1,29	0,901475	1,69	0,954486	2,09	0,981691	2,49	0,993613
0,1	0,539828	0,5	0,691462	0,9	0,81594	1,3	0,9032	1,7	0,955435	2,1	0,982136	2,5	0,99379
0,11	0,543795	0,51	0,694974	0,91	0,818589	1,31	0,904902	1,71	0,956367	2,11	0,982571	2,51	0,993963
0,12	0,547758	0,52	0,698468	0,92	0,821214	1,32	0,906582	1,72	0,957284	2,12	0,982997	2,52	0,994132
0,13	0,551717	0,53	0,701944	0,93	0,823814	1,33	0,908241	1,73	0,958185	2,13	0,983414	2,53	0,994297
0,14	0,55567	0,54	0,705401	0,94	0,826391	1,34	0,909877	1,74	0,95907	2,14	0,983823	2,54	0,994457
0,15	0,559618	0,55	0,70884	0,95	0,828944	1,35	0,911492	1,75	0,959941	2,15	0,984222	2,55	0,994614
0,16	0,563559	0,56	0,71226	0,96	0,831472	1,36	0,913085	1,76	0,960796	2,16	0,984614	2,56	0,994766
0,17	0,567495	0,57	0,715661	0,97	0,833977	1,37	0,914657	1,77	0,961636	2,17	0,984997	2,57	0,994915
0,18	0,571424	0,58	0,719043	0,98	0,836457	1,38	0,916207	1,78	0,962462	2,18	0,985371	2,58	0,99506
0,19	0,575345	0,59	0,722405	0,99	0,838913	1,39	0,917736	1,79	0,963273	2,19	0,985738	2,59	0,995201
0,2	0,57926	0,6	0,725747	1	0,841345	1,4	0,919243	1,8	0,96407	2,2	0,986097	2,6	0,995339
0,21	0,583166	0,61	0,729069	1,01	0,843752	1,41	0,92073	1,81	0,964852	2,21	0,986447	2,61	0,995473
0,22	0,587064	0,62	0,732371	1,02	0,846136	1,42	0,922196	1,82	0,96562	2,22	0,986791	2,62	0,995604
0,23	0,590954	0,63	0,735653	1,03	0,848495	1,43	0,923641	1,83	0,966375	2,23	0,987126	2,63	0,995731
0,24	0,594835	0,64	0,738914	1,04	0,85083	1,44	0,925066	1,84	0,967116	2,24	0,987455	2,64	0,995855
0,25	0,598706	0,65	0,742154	1,05	0,853141	1,45	0,926471	1,85	0,967843	2,25	0,987776	2,65	0,995975
0,26	0,602568	0,66	0,745373	1,06	0,855428	1,46	0,927855	1,86	0,968557	2,26	0,988089	2,66	0,996093
0,27	0,60642	0,67	0,748571	1,07	0,85769	1,47	0,929219	1,87	0,969258	2,27	0,988396	2,67	0,996207
0,28	0,610261	0,68	0,751748	1,08	0,859929	1,48	0,930563	1,88	0,969946	2,28	0,988696	2,68	0,996319
0,29	0,614092	0,69	0,754903	1,09	0,862143	1,49	0,931888	1,89	0,970621	2,29	0,988989	2,69	0,996427
0,3	0,617911	0,7	0,758036	1,1	0,864334	1,5	0,933193	1,9	0,971283	2,3	0,989276	2,7	0,996533
0,31	0,62172	0,71	0,761148	1,11	0,8665	1,51	0,934478	1,91	0,971933	2,31	0,989556	2,71	0,996636
0,32	0,625516	0,72	0,764238	1,12	0,868643	1,52	0,935745	1,92	0,972571	2,32	0,98983	2,72	0,996736
0,33	0,6293	0,73	0,767305	1,13	0,870762	1,53	0,936992	1,93	0,973197	2,33	0,990097	2,73	0,996833
0,34	0,633072	0,74	0,77035	1,14	0,872857	1,54	0,93822	1,94	0,97381	2,34	0,990358	2,74	0,996928
0,35	0,636831	0,75	0,773373	1,15	0,874928	1,55	0,939429	1,95	0,974412	2,35	0,990613	2,75	0,99702
0,36	0,640576	0,76	0,776373	1,16	0,876976	1,56	0,94062	1,96	0,975002	2,36	0,990863	2,76	0,99711
0,37	0,644309	0,77	0,77935	1,17	0,879	1,57	0,941792	1,97	0,975581	2,37	0,991106	2,77	0,997197
0,38	0,648027	0,78	0,782305	1,18	0,881	1,58	0,942947	1,98	0,976148	2,38	0,991344	2,78	0,997282
0,39	0,651732	0,79	0,785236	1,19	0,882977	1,59	0,944083	1,99	0,976705	2,39	0,991576	2,79	0,997365
0,4	0,655422	0,8	0,788145	1,2	0,88493	1,6	0,945201	2	0,97725	2,4	0,991802	2,8	0,997445

Zadanie 1.

Dysponujemy następującymi danymi dla spółek A i B. Spółki A i B znajdują się w różnych sektorach gospodarki:

Współczynnik beta dla akcji spółki A	1.4
Współczynnik beta dla akcji spółki B	1.1
Stopa zwrotu z portfela rynkowego na rynku, na którym handlowane są akcje spółki A i B	6%
Stopa wolna od ryzyka dla obligacji rządowych	3%

Stosunek kapitału pozyskanego w drodze emisji akcji i obligacji dla spółki A wynosi 2:3, stosunek kapitału pozyskanego w drodze emisji akcji i obligacji dla spółki B wynosi 1:1 (zgodnie z wartościami rynkowymi). Spółki wyceniane są jako firmy wolne od ryzyka kredytowego, co znajduje odzwierciedlenie w koszcie spłaty zobowiązań z wyemitowanych obligacji. Stosujemy model CAPM do wyznaczenia kosztu emisji akcji.

a) Wyznacz koszt kapitału (WACC) dla spółki A jako ważony koszt emisji akcji i obligacji (2p),
b) Spółka A planuje poszerzyć swoją działalność w obecnym sektorze pozyskując źródła finansowania w stosunku 2:3. Zaproponuj i uzasadnij stopę dyskonta, którą spółka A powinna wykorzystać do oceny zyskowności projektu inwestycyjnego poszerzenia swojej obecnej działalności (1p),
c) Spółka A planuje przejąć spółkę B. Zakup spółki B zostanie sfinansowany poprzez emisję akcji i obligacji w stosunku 1:1. Zaproponuj i uzasadnij stopę dyskonta, którą spółka A powinna wykorzystać do oceny zyskowności projektu inwestycyjnego zakupu spółki B (1p),
d) Wyjaśnij, czy wyznaczony przez Ciebie w punkcie c) koszt emisji akcji zmieniłby się, jeżeli zakup zostałby finansowany przez emisję akcji i obligacji w stosunku 1:2. Równoważnie, czy premia za ryzyko akcji dla spółki zależy od struktury finansowania tejże spółki (1p)?

Odpowiedzi:

a) Koszt emisji obligacji = 3%.
Koszt emisji akcji A zgodnie z CAPM = 3%+1.4*(6%-3%) = 7.20%.
WACC = 2/5*7.20%+3/5*3% = 4.68%.

b) Należy wykorzystać stopę 4.68%, ponieważ ta stopa odzwierciedla oczekiwania inwestorów dotyczące zwrotów z inwestycji w spółkę A.

c) Koszt emisji akcji B zgodnie z CAPM = 3%+1.1*(6%-3%) = 6.30%.
WACC = 1/2*6.30%+1/2*3% = 4.65%.
Należy tym razem wykorzystać stopę 4.65% ponieważ ta stopa odzwierciedla oczekiwania inwestorów dotyczące zwrotów z inwestycji w spółkę B.

d) Spodziewamy się, że premia za ryzyko będzie wyższa dla spółki, dla której udział obligacji w strukturze finansowania działalności jest wyższy, ponieważ narażona jest ona na większe ryzyko finansowe obsługi długu. Dźwignia finansowa powoduje, że akcjonariusze domagają się odpowiednio wyższej stopy zwrotu. Jest to jedna z obserwacji empirycznych, która podważa wykorzystanie modelu CAPM w praktyce (anomalie CAPM) i wskazuje na konieczność wykorzystania modeli wieloczynnikowych.

Przykładowa literatura: Rozdziały 5.2-5.3 w *"Financial Markets Theory: Equilibrium, Efficiency and Information", 2nd edition - E. Barucci, C. Fontana, Springer, 2017* oraz Rozdziały 8.3, 9.1-9.3 w *"Principles of Corporate Finance", 13th edition – R. Brealey, S. Myers, F. Allen, McGraw Hill, 2020.*

Zadanie 2.

a) Wyjaśnij *experience rating* oraz *risk rating* jako metody kwantyfikacji ryzyka poziomu śmiertelności, w szczególności przedstaw podstawowe założenia i modele/techniki stosowane w obrębie tych metod kwantyfikacji ryzyka (2p.),
b) Podaj i krótko opisz jeden model/technikę, który można wykorzystać do kwantyfikacji ryzyka zmienności śmiertelności (1p.),
c) Podaj i krótko opisz jeden model/technikę, który można wykorzystać do kwantyfikacji ryzyka trendu śmiertelności (1p.),
d) Podaj przykład innego czynnika ryzyka w ubezpieczeniach (poza ryzykiem śmiertelności i długowieczności), które może być kwantyfikowane przy użyciu metod *experience rating* lub *risk rating,* i krótko opisz to ryzyko (1p.)

Odpowiedzi:

a-c) W oparciu np. o rozdział 14.8 w *"Financial Enterprise Risk Management", 2nd edition - P. Sweeting, Cambridge, 2017.*
d) Np. Ryzyko rezygnacji.

Zadanie 3.

Rozważmy 3-letnie ubezpieczenie z funduszem inwestycyjnym ze składką jednorazową i gwarancją minimalnego świadczenia związanego z dożyciem końca trwania ubezpieczenia. Pomijamy w tym zadaniu świadczenie w wyniku zgonu. Składka w wysokości 100 wpłacana jest na fundusz w momencie t=0, którego dynamika opisana jest geometrycznym ruchem Browna zgodnie ze wzorem

$$dS(t) = aS(t)dt + bS(t)dW(t),$$

gdzie $a = 6\%$, $b = 15\%$. Zwroty z funduszu determinują wartość rachunku w ubezpieczeniu. Na końcu każdego roku, z rachunku pobierana jest przez ubezpieczyciela opłata w wysokości 3% wartości rachunku. W momencie końca trwania umowy, jeżeli ubezpieczony przeżyje, ubezpieczyciel wypłaca ubezpieczonemu większą z wartości: wartość rachunku lub wpłaconą składkę powiększoną o stopę zwrotu 5% rocznie. Prawdopodobieństwo śmiertelności wynosi 1% rocznie w całym okresie trwania ubezpieczenia, zgodnie z najlepszym oszacowaniem aktuariusza. Zobowiązanie ubezpieczyciela jest równe świadczeniu płatnemu na koniec trwania umowy. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i stopa wolna od ryzyka wynosi 2% w okresie rocznym. Ryzyko śmiertelności jest niezależne od ryzyka finansowego i zakładamy, że ryzyko śmiertelności jest w pełni dywersyfikowalne w portfelu. Opcje kwotowane na rynku finansowym wyceniane są zgodnie z modelem Blacka-Scholesa. Na rynku finansowym dostępne są rachunek bankowy wolny od ryzyka oraz fundusz. Nie ma ograniczeń w handlu na rynku finansowym.

a) Opisz zasadę wyceny zobowiązań obowiązującą w reżimie Wypłacalność II (1p),
b) Wyznacz wartość zobowiązania w reżimie Wypłacalność II. Wyjaśnij swoje obliczenia odwołując się do zasad wyceny w reżimie Wypłacalność II (2p),
c) Oceń czy opłata pobierana z rachunku przez ubezpieczyciela jest wystarczająca do pokrycia gwarancji minimalnego świadczenia (1p),
d) Wyznacz prawdopodobieństwo, uwzględniając ryzyko finansowe i śmiertelności, że gwarancja minimalnego świadczenia będzie *in-the-money* dla pojedynczej polisy (1p).

Wskazówka 1: wzór Blacka Scholesa dla opcji put:

$$Cena\ opcji\ put = -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT},$$
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Wskazówka 2: rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego dla ceny akcji jest proces $S(t) = e^{at-\frac{1}{2}b^2t+bW(t)}$, gdzie $W(t) \sim N(0, b^2t)$.

Odpowiedzi:

a) W oparciu np. o art. 75-79 w *DYREKTYWA PARLAMENTU EUROPEJSKIEGO I RADY 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II).*

b) Ponieważ ryzyko śmiertelności jest w pełni dywersyfikowalne w portfelu, możemy założyć, że losowa liczba zgonów jest równa wartości oczekiwanej liczby zgonów obliczonej przy realistycznych założeniach dotyczących przyszłych wsp. umieralności. W konsekwencji, liczba świadczeń związanych z dożyciem jest traktowana w sposób deterministyczny w wycenie zobowiązania. Ponieważ możemy replikować przepływy finansowe, wartość zobowiązania jest równa wartości rynkowej portfela replikującego zobowiązanie. Dodatkowo, powinniśmy również wyznaczyć margines ryzyka związany z ryzykiem długowieczności (trwały spadek wsp. umieralności o 20%). W celu uproszczenia obliczeń wartości zobowiązania, można było jednak pominąć ten komponent.

Załóżmy, że *S(0)=1.* Wtedy *S(T)* opisuje stopę zwrotu z funduszu w całym okresie trwania umowy. Wartość rachunku *F* w momencie *T* dana jest wzorem

$$F(T) = F(0) * S(T) * (1-p)^T, \quad F(0) = Składka,$$

gdzie *p* oznacza opłatę pobieraną z rachunku. Zobowiązanie ma postać

$$\begin{aligned} H &= \mathrm{N} * \max(F(T), F(0) * (1+g)^T) \\ &= \mathrm{N} * \max(F(0) * (1+g)^T - F(0) * S(T) * (1-p)^T, 0) \\ &\quad + N * F(0) * S(T) * (1-p)^T \\ &= N * (1-p)^T * F(0) * \max\left(\frac{(1+g)^T}{(1-p)^T} - S(T), 0\right) + N * F(T), \end{aligned}$$

gdzie *g* oznacza gwarantowaną stopę zwrotu i N jest zmienną losową, która opisuje czy ubezpieczony dożył końca umowy. Zgodnie z założeniami, przyjmujemy, że $N = (1-1\%)^3$.

Wykorzystując wzór Blacka-Scholesa, wartość 1 jednostki opcji put przy parametrach

$$r = \log(1+0.02), \sigma = 0.15, T = 3, K = \frac{(1+5\%)^3}{(1-3\%)^3}, S(0) = 1,$$

jest równa 0.2365. Wartość gwarancji wynosi $(1-1\%)^3 * 100 * (1-3\%)^3 * 0.2365 = 20.9489$. Wartość rachunku wynosi $(1-1\%)^3 * 100 * (1-3\%)^3 = 88.5565$, ponieważ obecna wartość *S(T)* jest równa *S(0)=1.* Wartość zobowiązania jest równa $20.9489 + 88.5565 = 109.5055$.

c) Ponieważ wartość zobowiązania przekracza wpłaconą składkę, pobierana opłata nie jest wystarczająca do pokrycia gwarancji.

d) Gwarancja finansowa jest *in-the-money* jeżeli $F(T) < F(0) * (1+g)^T$, czyli

$$e^{aT-\frac{1}{2}b^2T+bW(T)} < \frac{(1+g)^T}{(1-p)^T}.$$

Ponieważ liczymy prawdopodobieństwo rzeczywiste, podstawiamy a=6%, a nie stopę wolną od ryzyka, tak jak przy wycenie opcji. Przekształcając powyższą nierówność, dostajemy

$$W(T) < \frac{\ln\left(\frac{(1+g)^T}{(1-p)^T}\right) - aT + \frac{1}{2}b^2T}{b}.$$

Prawdopodobieństwo, że gwarancja finansowa jest *in-the-money* wynosi 0.6376. Dodatkowo, ubezpieczony musi przeżyć z prawdopodobieństwem $(1 - 1\%)^3$ =0.9703, aby wykonać gwarancję. Ostatecznie, dostajemy prawdopodobieństwo, jako iloczyn dwóch prawdopodobieństw, równe 0.6187.

Uwaga: W arkuszu pojawiła się błędna wskazówka, mówiąca że $W(t) \sim N(0, b^2t)$, podczas gdy $W(t) \sim N(0, t)$. Ten element nie wpływał na ostateczną oceną zadania.

Przykładowa literatura: Rozdział 18.2 w *"Actuarial Finance – Derivatives, Quantitative Models and Risk Management" - M. Boudreault, J.F. Renaud, Wiley, 2019* oraz art. 75-79 w *DYREKTYWA PARLAMENTU EUROPEJSKIEGO I RADY 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II).*

Zadanie 4.

Rozważamy ryzyko rezerw pochodzące z poprzednich lat szkodowych i stochastyczną wersję modelu Chain-Ladder (model Merza-Wütricha). Poniższa tabela przedstawia prognozę najlepszego oszacowania przyszłych płatności (BEL) na początku roku kalendarzowego oraz wariancję straty jednorocznej w kolejnych latach kalendarzowych. Rozważamy wyłącznie błąd składnika losowego w procesie rozwoju szkód i pomijamy błąd estymacji parametrów w modelu Chain-Ladder.

Rok kalendarzowy	BEL	Wariancja straty jednorocznej
1	300	10^2
2	200	6^2
3	80	3^2

Roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 0% - nie uwzględniamy więc dyskontowania w obliczeniach. Koszt kapitału wynosi 6%. Wymóg kapitałowy dla ryzyka rezerw w reżimie Wypłacalność II na najbliższy rok kalendarzowy został obliczony na poziomie 40.

a) Wyjaśnij, czy aktuariusz wyznaczający wymóg kapitałowy w reżimie Wypłacalność II przyjął rozkład normalny w swoich obliczeniach, czy też inny rozkład (1p),
b) Wyznacz wartość zobowiązania w reżimie Wypłacalność II na początku najbliższego roku kalendarzowego (rok kalendarzowy 1) - wyznacz wartość najlepszego oszacowania oraz margines ryzyka. Wyjaśnij swoje obliczenia. Do prognozy wymogów kapitałowych w kolejnych latach kalendarzowych i obliczenia marginesu ryzyka zaproponuj czynnik ryzyka i uzasadnij swój wybór (2p),
c) Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka rezerw w horyzoncie ostatecznym stosując miarę Value-at-Risk na poziomie 75%. Przyjmij założenie, że szkodę ostateczną, czyli zagregowane płatności, można aproksymować rozkładem log-normalnym i straty jednoroczne są nieskorelowane w kolejnych latach kalendarzowych. Wyjaśnij swoje obliczenia (2p).

<u>Wskazówka:</u> Niech $X = e^{a+bZ}$ gdzie $Z \sim N(0,1)$. Wtedy $E[X^k] = e^{ak \ \frac{1}{2}b^2k^2}$.

Odpowiedzi:

a) Wymóg kapitałowy w reżimie Wypłacalność II wyznaczamy jako kwantyl rzędu 99.5% w rozkładzie straty jednorocznej. Jeżeli zostałoby przyjęte założenie o rozkładzie normalnym straty jednorocznej, wtedy otrzymalibyśmy kapitał w wysokości 2.58*10=25.80.

b) Wartość najlepszego oszacowania wynosi 300. Wymogi kapitałowe w kolejnych latach możemy prognozować wykorzystując jeden z dostępnych czynników ryzyka: przyszłe wartości BEL, wariancje lub odchylenia straty jednorocznej w kolejnych latach kalendarzowych. W praktyce, wymóg kapitałowy może być proporcjonalny do wartości BEL (ryzyko rezerw w Formule Standardowej) lub może być aproksymowany przy pomocy błędu średniokwadratowego prognozy straty jednorocznej (model Merza-Wütricha i parametry specyficzne w ryzyku rezerw). Stosując BEL do prognozy wymogów kapitałowych w kolejnych latach kalendarzowych dostajemy:

Rok kalendarzowy	BEL	SCR
1	300	40
2	200	26.6667
3	80	10.6667

Margines ryzyka wynosi:

$$RM = CoC * \sum_{i=1}^{n} \frac{SCR(i)}{\left(1+r_f\right)^i} = 6\% * \left(\frac{40}{1+0\%} + \frac{26.6667}{(1+0\%)^2} + \frac{10.6667}{(1+0\%)^3}\right) = 4.64$$

Wartość zobowiązania wynosi 300+4.64=304.64.

c) Strata ostateczna jest równa różnicy pomiędzy obecnym najlepszym oszacowaniem szkody ostatecznej a finalną realizacją szkody ostatecznej, gdzie przez szkodę ostateczną rozumiemy w tym przykładzie zagregowane przyszłe płatności w latach kalendarzowych 1, 2 i 3. Strata ostateczna jest również równa sumie strat jednorocznych w kolejnych latach kalendarzowych (zmian w najlepszym oszacowaniu szkody ostatecznej). Korzystając z braku korelacji pomiędzy stratami, możemy wyznaczyć:

$$Var(L) = Var(L_1 + L_2 + L_3) = Var(L_1) + Var(L_2) + Var(L_3) = 100 + 36 + 9 = 145.$$

W konsekwencji, szkoda ostateczna ma rozkład o wartości oczekiwanej równej 300 (wartość BEL na początku roku kalendarzowego 1) i wariancji 145. Stosując metodę momentów możemy wyznaczyć parametry a i b, które są równe a=5.7029 i b=0.0401. W konsekwencji, wymóg kapitałowy w horyzoncie ostatecznym wynosi

$$e^{5.7029+0.0401*0.6745} - 300 = 7.9815.$$

<u>Przykładowa literatura:</u> *"Claims run-off uncertainty: the full picture" - M. Merz, M.V. Wüthrich, 2015* oraz Rozdziały 2 i 3.3 w *"A review of the risk margin – Solvency II and beyond" - A. J. Pelkiewicz, S. W. Ahmed, P. Fulcher, K. L. Johnson, S. M. Reynolds, R. J. Schneider and A. J. Scott, British Actuarial Journal 25, s. 1-72, 2020.*

Zadanie 5.

Jako początkową datę wyceny pozycji w bilansie rozważamy początek roku kalendarzowego 2022. Firma ubezpieczeniowa posiada jednoroczne zobowiązanie. Świadczenia są płatne pod koniec roku kalendarzowego i pochodzą z rozkładu log-normalnego o wartości oczekiwanej 1,000 i odchyleniu 2,000. Wartość zobowiązania wyznaczamy jako najlepsze oszacowanie zdyskontowanych przyszłych świadczeń, gdzie do dyskontowania wykorzystujemy stopę wolną od ryzyka dla odpowiedniego terminu zapadalności zobowiązania. Firma posiada środki własne w wysokości 1,300. Aktywa, równe pasywom, zostały zainwestowane w 60% w 4-letnią zero-kuponową obligację rządową, bez ryzyka kredytowego, o rocznej stopie rentowności równej 3.5% oraz w 40% w akcje. Instrumenty finansowe wyceniane są zgodnie z wartościami rynkowymi i na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową.

a) Wyjaśnij pojęcie *reverse stress test* (1p),
b) Wyznacz wartość środków własnych na koniec roku kalendarzowego, po wypłaceniu świadczeń, przy scenariuszu: spadek stopy rentowności z obligacji do poziomu 2% (nadal zakładamy płaską strukturę terminową), spadek ceny akcji o 15%, wysokość świadczeń na poziomie kwantyla 75% rozkładu prawdopodobieństwa (2p),
c) Wyznacz scenariusz dla wysokości świadczeń (kwantyl w rozkładzie prawdopodobieństwa), przy którym zostaną wyczerpane środki własne na koniec roku kalendarzowego. Przyjmij założenie, że akcje zarabiają stopę wolną od ryzyka i stopa rentowności dla obligacji nie zmienia się (2p).

Wskazówka: Niech $X = e^{a+bZ}$ gdzie $Z \sim N(0,1)$. Wtedy $E[X^k] = e^{ak+\frac{1}{2}b^2k^2}$.

Odpowiedzi:

a) *Reverse stress test* dla czynnika ryzyka (lub grupy czynników ryzyka) jest to scenariusz, który prowadzi do zadanego z góry zdarzenia, np. wyczerpania środków własnych w podpunkcie c) w tym zadaniu.

b) Stosując metodę momentów możemy wyznaczyć parametry a i b w rozkładzie log-normalnym opisującym losowe świadczenie w chwili t=1. Dostajemy: a=6.1030 i b=1.2686. Wartość zobowiązania w zadanym scenariuszu na moment t=1 wynosi $e^{6.1030+1.2686*0.6745} = 1{,}052.2842$.

   Wartość zobowiązania na moment t=0 wynosi $\frac{1{,}000}{1+3.5\%} = 966.1836$. Wartość aktywów na moment t=0 wynosi więc 1,300+966.18.36=2,266.1836 Wartość akcji na moment t=0 wynosi 40%*2,266.1836 =906.4734. Wartość akcji w zadanym scenariuszu na moment t=1 wynosi 906.4734*(1-15%)=679.8551. Wartość obligacji na moment t=0 wynosi 60%*2,266.1836 =1,359.7101. Wartość obligacji w zadanym scenariuszu na moment t=1 wynosi

$$1{,}359.7101 * \frac{(1+3.5\%)^4}{(1+2\%)^3} = 1{,}470.3043.$$

Wysokość środków własnych na moment t=1 wynosi 679.8551+1,470.3043-1,052.2842=1,097.8752.

c) Wyznaczamy scenariusz dla zmiennej z rozkładu $Z \sim N(0,1)$, przy którym wartość zobowiązania przekroczy wartość aktywów. Należy wyznaczyć wartość *z* równania:

$$e^{6.1030+\ .2686*z} \geq 906.4734 * (1+3.5\%) + 1{,}359.7101 * \frac{(1+3.5\%)^4}{(1+3.5\%)^3}.$$

Dostajemy $z \geq 1.3063$, co odpowiada prawdopodobieństwu 9.57% w prawym ogonie rozkładu prawdopodobieństwa.

Przykładowa literatura: Rozdział 3.5.6 w *"Actuarial Aspects of ERM for Insurance Companies", 2016.*

Zadanie 6.

Rozważamy ryzyko składki i ryzyko rezerw w reżimie Wypłacalność II w segmencie ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej z tytułu użytkowania pojazdów mechanicznych (segment 1) oraz w segmencie ubezpieczenia od ognia i innych szkód rzeczowych (segment 4). Miary wielkości ryzyka składki wynoszą, odpowiednio, 500 i 700, odchylenia standardowe ryzyka składki wynoszą 10% i 8%, miary wielkości ryzyka rezerw wynoszą 300 i 200, odchylenia standardowe ryzyka rezerw wynoszą 9% i 10%, współczynnik korelacji pomiędzy ryzykiem składki i ryzykiem rezerw wynosi 0.5, współczynnik korelacji pomiędzy segmentami wynosi 0.25.

a) Stosujemy agregację hierarchiczną zgodnie z Formułą Standardową. Na pierwszym poziomie agregujemy ryzyko składki z ryzykiem rezerw dla każdego segmentu oddzielnie, na kolejnym poziomie agregujemy łączne ryzyko składki i rezerw pomiędzy dwoma segmentami. Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka składki i ryzyka rezerw dla obu segmentów łącznie (zdywersyfikowany kapitał) (2p),
b) Podaj przykład dwuwymiarowego rozkładu strat (rozkłady brzegowe i struktura zależności), przy którym metoda agregacji ryzyka z Formuły Standardowej jest poprawna. Odpowiedź uzasadnij wyprowadzając wzór na miarę VaR dla zagregowanej straty (2p),
c) Firma analizuje ryzyko składki w segmencie I w oparciu o swoje historyczne dane. Posiadamy następujące informacje:

Rok szkodowy t	Zagregowane szkody w roku szkody y_t (najlepsze oszacowania po pierwszym roku)	Składka zarobiona w roku szkody x_t
1	35	100
2	110	150
3	100	200

Zakładamy, że współczynnik $z_t = \frac{y_t}{x_t}$ ma rozkład normalny o takich samych parametrach niezależnych od roku szkody. Oszacuj odpowiedni parametr rozkładu zmiennej z_t metodą momentów i oceń czy współczynnik odchylenia standardowego z Formuły Standardowej powinien być wykorzystany przez firmę do wyznaczenia wymogu kapitałowego dla ryzyka składki (1p).

Odpowiedzi:

a) Wymóg kapitałowy dla segmentu I:

$$3 * \sqrt{(500 * 0.1)^2 + (300 * 0.09)^2 + 2 * 500 * 0.1 * 300 * 0.09 * 0.5}$$
$$= 203.0049$$

Wymóg kapitałowy dla segmentu II:

$$3 * \sqrt{(700 * 0.08)^2 + (200 * 0.1)^2 + 2 * 700 * 0.08 * 200 * 0.1 * 0.5} = 204.7047$$

Wymóg kapitałowy dla segmentu I i II:

$$\sqrt{(203.0049)^2 + (204.7047)^2 + 2 * 203.0049 * 204.7047 * 0.25} = 322.3244.$$

b) Rozważmy wektor o łącznym rozkładzie normalnym:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathrm{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} a^2 & a * b * \rho \\ a * b * \rho & b^2 \end{bmatrix}\right)$$

Z własności rozkładów normalnych, dostajemy

$$VaR_p(X_1 + X_2) = \phi^{-1}(p) * \sqrt{a^2 + b^2 + 2 * a * b * \rho} = \sqrt{(VaR_p(X_1))^2 + (VaR_p(X_2))^2 + 2 * VaR_p(X_1) * VaR_p(X_2) * \rho}.$$

Powyższa własność dla kwantyli jest spełniona dla wszystkich rozkładów eliptycznych.

c) Wyznaczamy historyczne realizacje współczynników szkodowości $z_1 = 0.35, z_2 = 0.73, z_3 = 0.5$. Wyznaczamy odchylenie standardowe, wykorzystując klasyczny estymator nieobciążony, równe 0.19. Otrzymana wartość jest wyższa niż wartość współczynnika z Formuły Standardowej. Zgodnie z Dyrektywą, jeżeli profil ryzyka zakładu ubezpieczeń znacznie odbiega od założeń leżących u podstaw obliczeń według Formuły Standardowej, organy nadzoru mogą wymagać zastąpienia części parametrów stosowanych w obliczeniach według Formuły Standardowej parametrami specyficznymi dla tego zakładu. Jednocześnie, zgodnie z Rozporządzeniem Delegowanym, aby wykorzystywać parametry specyficzne, firma powinna posiadać co najmniej 5 lat wiarygodnych obserwacji. W tym przykładzie, współczynnik powinien być monitorowany w kolejnych latach, aby ustalić, czy Formuła Standardowa jest adekwatna do oceny ryzyka składki.

<ins>Przykładowa literatura</ins>: Rozdział 8.4 w *“Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools”, revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015, art. 110 w DYREKTYWA PARLAMENTU EUROPEJSKIEGO I RADY 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II)* oraz art. 218-220 i Załącznik XVII w *ROZPORZĄDZENIE DELEGOWANE KOMISJI (UE) 2015/35 z dnia 10 października 2014 r. uzupełniające dyrektywę Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II).*

Zadanie 7

Rozważamy spółkę, która posiada dwie linie biznesowe A i B. Posiadamy następujące informacje:

	Linia A	Linia B
Kapitał ekonomiczny przed dywersyfikacją	140	200
Oczekiwany zysk	80	120

Dodatkowo, współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy stratami w liniach A i B wynosi 0.25. Kapitał ekonomiczny wyznaczamy stosując miarę odchylenia standardowego przemnożonego przez 2.

a) Wyjaśnij na czym polega problem alokacji zdywersyfikowanego kapitału z poziomu spółki do poziomu linii biznesowych. Podaj ogólny wzór alokacji kapitału metodą Eulera dla dowolnej miary ryzyka oraz szczególny przypadek dla miary ryzyka opartej na odchyleniu standardowym (2p),
b) Wyznacz zdywersyfikowany kapitał ekonomiczny dla spółki i alokację zdywersyfikowanego kapitału ekonomicznego do poziomu linii biznesowych stosując alokację Eulera (2p),
c) Wyznacz miary RAROC dla spółki i obu linii biznesowych stosując zdywersyfikowany kapitał zaalokowany do linii (1p).

Odpowiedzi:

a) W oparciu np. o rozdział 8.5 w *"Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015.*

b) Ponieważ stosujemy miarę ryzyka proporcjonalną do odchylenia standardowego, dostajemy zdywersyfikowany kapitał

$$RC(L_1 + L_2) = \sqrt{(140)^2 + (200)^2 + 2 * 140 * 200 * 0.25} = 271.2932$$

Jednocześnie, możemy wyznaczyć odchylenia standardowe w liniach

	Linia A	Linia B
Kapitał ekonomiczny przed dywersyfikacją	140	200
Odchylenie standardowe	70	100

Wyznaczamy alokację do linii pierwszej

$$EC(L_1|L) = 2 * \frac{cov(L_1, L_1 + L_2)}{SD(L_1 + L_2)} = 2 * \frac{70^2 + 70 * 100 * 0.25}{\sqrt{70^2 + 100^2 + 2 * 70 * 100 * 0.25}}$$
$$= 98.0489.$$

Alokacja do linii drugiej wynosi

$$EC(L_2|L) = 2 * \frac{cov(L_2, L_1 + L_2)}{SD(L_1 + L_2)} = \frac{100^2 + 70 * 100 * 0.25}{\sqrt{70^2 + 100^2 + 2 * 70 * 100 * 0.25}}$$
$$= 173.2443.$$

c) Zakładając koszt kapitału równy 6% oraz kapitały własne tożsame z kapitałem ekonomicznym, wyznaczamy miary RAROC:

$$RAROC_{linia\ A} = \frac{80 - 6\% * 98.0489}{98.0489},$$
$$RAROC_{linia\ B} = \frac{120 - 6\% * 173.2443}{173.2443},$$
$$RAROC_{spółka} = \frac{80 + 120 - 6\% * 271.2932}{271.2932}.$$

Alternatywnie, w związku z brakiem w treści zadania doprecyzowania założeń potrzebnych do wyznaczenia miar RAROC, można było policzyć miary RORAC:

$$RORAC_{linia\ A} = \frac{80}{98.0489},$$
$$RORAC_{linia\ B} = \frac{120}{173.2443},$$
$$RORAC_{spółka} = \frac{80 + 120}{271.2932}.$$

<u>Przykładowa literatura:</u> Rozdział 8.5 *w "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015* oraz *"EVA/RAROC vs. MCEV Earnings: A Unification Approach", C. Kraus, The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice 38, s. 113–136, 2013.*

Zadanie 8.

a) Wyjaśnij krótko cztery podstawowe metody zarządzania ryzykiem (*reduce, remove, transfer, accept*), w szczególności wskaż jeden przykład dla każdej metody (4p),
b) Podaj przykład metody zarządzania ryzykiem *cyber* (1p).

Odpowiedzi:

a) W oparciu np. o rozdział 16.1 w *"Financial Enterprise Risk Management", 2nd edition - P. Sweeting, Cambridge, 2017.*

b) W oparciu np. o rozdział 16.12.3 w *"Financial Enterprise Risk Management", 2nd edition - P. Sweeting, Cambridge, 2017.*

Zadanie 9.

Firma ubezpieczeniowa posiada zobowiązanie w wysokości 500 w terminie zapadalności równym 7 lat. Struktura terminowa stóp procentowych wyznaczona jest w oparciu o dwie stopy w terminach zapadalności 5 i 10 lat w wysokości, odpowiednio, 4% i 8%. Stopy w pozostałych terminach zapadalności, pomiędzy 5 i 10, definiowane są poprzez liniową aproksymację stóp z terminów zapadalności 5 i 10 lat. Przyjmujemy, że stopy są stopami spot oprocentowania ciągłego.

a) Stosując aproksymację Taylora pierwszego rzędu wyznacz wartość zobowiązania w scenariuszu spadku stopy w terminie zapadalności 10 lat o 0.3pp (2p),
b) Wyznacz skład portfela inwestycyjnego, o wartości początkowej równej wartości zobowiązania, zabezpieczającego powyższą zmianę wartości zobowiązania, zakładając, że w portfelu inwestycyjnym znajdują się obligacje zerokuponowe o terminach zapadalności 5 i 10 lat. Zastosuj aproksymację Taylora pierwszego rzędu do wyznaczenia zmian wartości zobowiązań i portfela inwestycyjnego (2p),
c) Wyjaśnij i wskaż w oparciu o rozwiązanie z punktu b), czy powyższy portfel inwestycyjny będzie zabezpieczał zmiany zobowiązania przy każdej zmianie stopy w terminie zapadalności 10 lat, niezależnie od wysokości tej zmiany, przy założeniu, że stopa w terminie zapadalności 5 lat nie zmienia się (1p).

Odpowiedzi:

a) Czynnik dyskontujący przepływ o terminie zapadalności 7 lat przy stopie *r* w terminie zapadalności 10 lat jest dany wzorem

$$D(r) = e^{-\left(\frac{3}{5}*0.04+\frac{2}{5}*r\right)*7}.$$

Wartość zobowiązania wyznaczamy zgodnie z aproksymacją pierwszego rzędu

$$500 * \left(D(0.08) - D_r\,(r)|_{r=0.08} * \frac{0.3}{100}\right) = 340.69.$$

b) Niech *a* oznacza liczbę 5-letnich obligacji o nominale 1, *b* – liczbę 10-letnich obligacji o nominale 1. Rozwiązujemy układ równań, gdzie poszczególne równania odzwierciedlają ceny w scenariuszu podstawowym i po szoku dla obligacji i zobowiązania

$$500 * e^{-\left(\frac{3}{5}*0.04+\frac{2}{5}*r\right)*7} = a * e^{-0.04*5} + b * e^{-r*10},$$
$$500 * e^{-\left(\frac{3}{5}*0.04+\frac{2}{5}*r\right)*7} - \frac{2}{5} * 7 * e^{-\left(\frac{3}{5}*0.04\ \ \frac{2}{5}*r\right)*7} * \Delta r$$
$$= a * e^{-0.04*5} + b * e^{-r*10} - 10 * b * e^{-r*10}\Delta r.$$

Podstawiamy $r = 0.08, \Delta r = -\frac{0.3}{100}$.

c) Z układu równań z punktu b) widzimy, że skonstruowany portfel obligacji będzie zabezpieczał (z małym błędem) zobowiązanie przy każdej małej zmianie stopy w terminie zapadalności 10 lat. Ponieważ wykorzystujemy aproksymację pierwszego rzędu, w scenariuszach dużych zmian stopy portfel obligacji nie będzie zabezpieczał zobowiązania.

Przykładowa literatura: Rozdział 20.3-20.4 w *“Actuarial Finance – Derivatives, Quantitative Models and Risk Management” - M. Boudreault, J.F. Renaud, Wiley, 2019.*

Zadanie 10.

Rozważmy dwa ryzykowne aktywa i instrument wolny od ryzyka dostępne na rynku finansowym. Ryzykowne aktywa posiadają oczekiwane stopy zwrotu - 5% i 8%, odchylenia standardowe stóp zwrotu - 8% i 12% i współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy stopami zwrotu równy 50%. Stopa wolna od ryzyka wynosi 3%. Rozważamy problem wyboru portfela Markowitza.

a) Wyprowadź i wyznacz alokację środków (w procentach) pomiędzy aktywa ryzykowne i wolne od ryzyka, przy której otrzymamy najmniejsze ryzyko inwestycyjne mierzone odchyleniem standardowym straty z inwestycji (strata z inwestycji mierzona jest stopą zwrotu z inwestycji) przy zadanej wartości oczekiwanej stopy zwrotu z inwestycji równej 6% (3p),
b) Wyznacz współczynnik Sharpe'a dla optymalnego portfela (1p),
c) Wyjaśnij, czy portfel o wartości oczekiwanej 6% i odchyleniu 10% leży na krzywej portfeli efektywnych i czy powinniśmy taki portfel inwestycyjny zastosować zgodnie z kryterium wyboru portfela Markowitza (1p).

Odpowiedzi:

a) Niech a oznacza procentowy udział środków zainwestowanych w pierwszy ryzykowny instrument, b – procentowy udział środków zainwestowanych w drugi ryzykowny instrument. Reszta środków inwestowana jest w instrument wolny od ryzyka. Rozwiązujemy problem optymalizacyjny

$$a^2 * 0.08^2 + b^2 * 0.12^2 + 2 * a * 0.08 * b * 0.12 * 0.5 \rightarrow min$$

p.w.

$$a * 0.05 + b * 0.08 + (1 - a - b) * 0.03 = 0.06.$$

Stosując metodę mnożników Lagrange'a, dostajemy

$$a = 11.84\%, b = 55.26\%.$$

b) Odchylenie standardowe dla optymalnego portfela wynosi 7.1525%. Współczynnik Sharpe wynosi

$$\frac{6\% - 3\%}{7.1525\%} = 41.9435\%.$$

c) Krzywa portfeli efektywnych jest to krzywa, przedstawiona w układzie współrzędnych, gdzie na osiach mamy wartości oczekiwane i odchylenia standardowe stóp zwrotu z portfeli, na której znajdują się portfela efektywne o minimalnym odchyleniu standardowym straty przy zadanej wartości oczekiwanej stopy zwrotu z portfela. Portfel o odchyleniu 10% przy wartości oczekiwanej 6% nie jest portfelem efektywnym ponieważ przy tej wartości oczekiwanej możemy osiągnąć mniejsze odchylenie na poziomie 7.1525%.

Przykładowa literatura: Rozdział 3.2 w *"Financial Markets Theory: Equilibrium, Efficiency and Information", 2nd edition - E. Barucci, C. Fontana, Springer, 2017.*

Sesja egzaminacyjna w dniu 20 września 2022 r.

Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń

Arkusz ocen

Zadanie nr	Punktacja
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	