Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXV Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 9 czerwca 2022 r.

Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 120 minut

Uwagi

Wartości dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego N(0,1):

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0,01	0,503989	0,41	0,659097	0,81	0,79103	1,21	0,886861	1,61	0,946301	2,01	0,977784	2,41	0,992024
0,02	0,507978	0,42	0,662757	0,82	0,793892	1,22	0,888768	1,62	0,947384	2,02	0,978308	2,42	0,99224
0,03	0,511966	0,43	0,666402	0,83	0,796731	1,23	0,890651	1,63	0,948449	2,03	0,978822	2,43	0,992451
0,04	0,515953	0,44	0,670031	0,84	0,799546	1,24	0,892512	1,64	0,949497	2,04	0,979325	2,44	0,992656
0,05	0,519939	0,45	0,673645	0,85	0,802337	1,25	0,89435	1,65	0,950529	2,05	0,979818	2,45	0,992857
0,06	0,523922	0,46	0,677242	0,86	0,805105	1,26	0,896165	1,66	0,951543	2,06	0,980301	2,46	0,993053
0,07	0,527903	0,47	0,680822	0,87	0,80785	1,27	0,897958	1,67	0,95254	2,07	0,980774	2,47	0,993244
0,08	0,531881	0,48	0,684386	0,88	0,81057	1,28	0,899727	1,68	0,953521	2,08	0,981237	2,48	0,993431
0,09	0,535856	0,49	0,687933	0,89	0,813267	1,29	0,901475	1,69	0,954486	2,09	0,981691	2,49	0,993613
0,1	0,539828	0,5	0,691462	0,9	0,81594	1,3	0,9032	1,7	0,955435	2,1	0,982136	2,5	0,99379
0,11	0,543795	0,51	0,694974	0,91	0,818589	1,31	0,904902	1,71	0,956367	2,11	0,982571	2,51	0,993963
0,12	0,547758	0,52	0,698468	0,92	0,821214	1,32	0,906582	1,72	0,957284	2,12	0,982997	2,52	0,994132
0,13	0,551717	0,53	0,701944	0,93	0,823814	1,33	0,908241	1,73	0,958185	2,13	0,983414	2,53	0,994297
0,14	0,55567	0,54	0,705401	0,94	0,826391	1,34	0,909877	1,74	0,95907	2,14	0,983823	2,54	0,994457
0,15	0,559618	0,55	0,70884	0,95	0,828944	1,35	0,911492	1,75	0,959941	2,15	0,984222	2,55	0,994614
0,16	0,563559	0,56	0,71226	0,96	0,831472	1,36	0,913085	1,76	0,960796	2,16	0,984614	2,56	0,994766
0,17	0,567495	0,57	0,715661	0,97	0,833977	1,37	0,914657	1,77	0,961636	2,17	0,984997	2,57	0,994915
0,18	0,571424	0,58	0,719043	0,98	0,836457	1,38	0,916207	1,78	0,962462	2,18	0,985371	2,58	0,99506
0,19	0,575345	0,59	0,722405	0,99	0,838913	1,39	0,917736	1,79	0,963273	2,19	0,985738	2,59	0,995201
0,2	0,57926	0,6	0,725747	1	0,841345	1,4	0,919243	1,8	0,96407	2,2	0,986097	2,6	0,995339
0,21	0,583166	0,61	0,729069	1,01	0,843752	1,41	0,92073	1,81	0,964852	2,21	0,986447	2,61	0,995473
0,22	0,587064	0,62	0,732371	1,02	0,846136	1,42	0,922196	1,82	0,96562	2,22	0,986791	2,62	0,995604
0,23	0,590954	0,63	0,735653	1,03	0,848495	1,43	0,923641	1,83	0,966375	2,23	0,987126	2,63	0,995731
0,24	0,594835	0,64	0,738914	1,04	0,85083	1,44	0,925066	1,84	0,967116	2,24	0,987455	2,64	0,995855
0,25	0,598706	0,65	0,742154	1,05	0,853141	1,45	0,926471	1,85	0,967843	2,25	0,987776	2,65	0,995975
0,26	0,602568	0,66	0,745373	1,06	0,855428	1,46	0,927855	1,86	0,968557	2,26	0,988089	2,66	0,996093
0,27	0,60642	0,67	0,748571	1,07	0,85769	1,47	0,929219	1,87	0,969258	2,27	0,988396	2,67	0,996207
0,28	0,610261	0,68	0,751748	1,08	0,859929	1,48	0,930563	1,88	0,969946	2,28	0,988696	2,68	0,996319
0,29	0,614092	0,69	0,754903	1,09	0,862143	1,49	0,931888	1,89	0,970621	2,29	0,988989	2,69	0,996427
0,3	0,617911	0,7	0,758036	1,1	0,864334	1,5	0,933193	1,9	0,971283	2,3	0,989276	2,7	0,996533
0,31	0,62172	0,71	0,761148	1,11	0,8665	1,51	0,934478	1,91	0,971933	2,31	0,989556	2,71	0,996636
0,32	0,625516	0,72	0,764238	1,12	0,868643	1,52	0,935745	1,92	0,972571	2,32	0,98983	2,72	0,996736
0,33	0,6293	0,73	0,767305	1,13	0,870762	1,53	0,936992	1,93	0,973197	2,33	0,990097	2,73	0,996833
0,34	0,633072	0,74	0,77035	1,14	0,872857	1,54	0,93822	1,94	0,97381	2,34	0,990358	2,74	0,996928
0,35	0,636831	0,75	0,773373	1,15	0,874928	1,55	0,939429	1,95	0,974412	2,35	0,990613	2,75	0,99702
0,36	0,640576	0,76	0,776373	1,16	0,876976	1,56	0,94062	1,96	0,975002	2,36	0,990863	2,76	0,99711
0,37	0,644309	0,77	0,77935	1,17	0,879	1,57	0,941792	1,97	0,975581	2,37	0,991106	2,77	0,997197
0,38	0,648027	0,78	0,782305	1,18	0,881	1,58	0,942947	1,98	0,976148	2,38	0,991344	2,78	0,997282
0,39	0,651732	0,79	0,785236	1,19	0,882977	1,59	0,944083	1,99	0,976705	2,39	0,991576	2,79	0,997365
0,4	0,655422	0,8	0,788145	1,2	0,88493	1,6	0,945201	2	0,97725	2,4	0,991802	2,8	0,997445

Zadanie 1.

Przez premię za ryzyko rozumiemy poniżej oczekiwaną premię za ryzyko. Dysponujemy następującymi informacjami dla akcji spółki A (w ujęciu rocznym):

Współczynnik beta dla akcji spółki A	1.6
Premia za ryzyko dla portfela rynkowego na rynku, na którym handlowane są akcje spółki A	4 p.p.
Stopa wolna od ryzyka dla obligacji rządowych	2%
Odchylenie standardowe stopy zwrotu akcji spółki A	6 p.p.
Odchylenie standardowe stopy zwrotu portfela rynkowego na rynku, na którym handlowane są akcje spółki A	3 p.p.

a) Wyjaśnij pojęcie premii za ryzyko dla akcji i wskaż dlaczego oczekujemy dodatnich premii za ryzyko na rynku finansowym (1p),
b) Zapisz równanie opisujące stopę zwrotu z akcji zgodnie z modelem CAPM i wskaż komponenty ryzyka systematycznego i niesystematycznego (specyficznego dla akcji), które determinują stopę zwrotu – równanie ma opisywać losową stopę zwrotu i zawierać losowe komponenty ryzyka systematycznego i niesystematycznego (1p),
c) Wyznacz premię za ryzyko dla akcji spółki A zgodnie z modelem CAPM (1p),
d) Wyznacz jaką część wariancji stopy zwrotu z akcji spółki A tworzy ryzyko systematyczne, a jaką ryzyko specyficzne dla spółki (1p),
e) Wyjaśnij czy potrzebujemy premii za ryzyko dla akcji w problemie wyboru portfela Markowitza – zapisz problem Markowitza i wskaż odpowiednie elementy pozwalające odpowiedzieć na pytanie (1p).

Odpowiedzi:

a) Premia za ryzyko dla akcji jest to nadwyżka oczekiwanej wartości stopy zwrotu z akcji ponad stopę zwrotu z instrumentu wolnego od ryzyka w danym okresie czasu. Spodziewamy się dodatniej premii za ryzyko jako wynagrodzenia dla inwestora, który podejmuje decyzję o inwestycji w ryzykowny instrument finansowy, który może ostatecznie przynieść mniejszy zwrot niż instrument wolny od ryzyka.

b) Równanie, stanowiące podstawę modelu CAPM, dla kluczowych zmiennych losowych jest postaci:

$$R_a = r_f + \beta * (R_m - r_f) + \varepsilon,$$

gdzie R_a jest zmienną losową opisującą stopę zwrotu z akcji, R_m – zmienną losową opisującą stopę zwrotu z portfela rynkowego i jednocześnie zmienną losową opisującą ryzyko systematyczne, ε – niezależną zmienną losową opisującą ryzyko niesystematyczne dla akcji.

c) Równanie dla wartości oczekiwanych jest postaci:

$$E(R_a) - r_f = \beta * \left(E(R_m) - r_f\right).$$

Podstawiając dane, dostajemy premię za ryzyko dla akcji równą 1.6*4 = 6.4 p.p.

d) Zgodnie z równaniem z punktu b, możemy wyznaczyć

$$\sigma_a^2 = \beta^2 * \sigma_m^2 + \sigma_\varepsilon^2.$$

Udział ryzyka systematycznego mierzonego wariancją w całkowitej wariancji stopy zwrotu akcji wynosi

$$\frac{1.6^2 * 0.03^2}{0.06^2} * 100\% = 64\%.$$

e) Problem Markowitza polega na znalezienie optymalnego składu portfela inwestycyjnego, który charakteryzować się będzie minimalną wariancją stopy zwrotu przy zadanej wartości oczekiwanej stopy zwrotu. W konsekwencji, potrzebujemy premii za ryzyko (oczekiwanych stóp zwrotu) dla akcji, ponieważ są one danymi wejściowymi, który wykorzystujemy rozwiązując problem optymalizacyjny.

Przykładowa literatura: Rozdziały 3.2 i 5.2 w *"Financial Markets Theory: Equilibrium, Efficiency and Information", 2nd edition - E. Barucci, C. Fontana, Springer, 2017* oraz Rozdział 14.2.3 w *"Financial Enterprise Risk Management", 2nd edition - P. Sweeting, Cambridge, 2017.*

Zadanie 2.

a) Wyjaśnij pojęcia ryzyka śmiertelności i długowieczności (1p),
b) Scharakteryzuj cztery rodzaje ryzyka śmiertelności i długowieczności związane z poziomem (*level*), zmiennością (*volatility*), trendem (*trend*) i zdarzeniami katastroficznymi (*catastrophe*), w szczególności wskaż kluczowe różnice pomiędzy czynnikami ryzyka *level* vs *volatility*, *volatility* vs *catastroph*e i *level* vs *trend* (4p).

Odpowiedzi:

<u>Przykładowa literatura:</u> Rozdział 7.8 w *"Financial Enterprise Risk Management", 2nd edition - P. Sweeting, Cambridge, 2017.*

Zadanie 3.

Rozważmy 5-letnie ubezpieczenie z funduszem inwestycyjnym ze składką jednorazową i gwarancją minimalnego świadczenia związanego z dożyciem końca trwania ubezpieczenia. Pomijamy w tym zadaniu świadczenie w wyniku zgonu. Składka w wysokości 10 wpłacana jest na fundusz w momencie t=0, którego dynamika opisana jest geometrycznym ruchem Browna zgodnie ze wzorem

$$dS(t) = aS(t)dt + bS(t)dW(t),$$

gdzie $a = 5\%, b = 10\%$. Zwroty z funduszu determinują wartość rachunku w ubezpieczeniu. Na końcu każdego roku, z rachunku pobierana jest przez ubezpieczyciela opłata w wysokości 2% wartości rachunku. W momencie końca trwania umowy, jeżeli ubezpieczony przeżyje, ubezpieczyciel wypłaca ubezpieczonemu większą z wartości: wartość rachunku lub wpłaconą składkę powiększoną o stopę zwrotu 3% rocznie. Prawdopodobieństwo śmiertelności wynosi 1% rocznie w całym okresie trwania ubezpieczenia, zgodnie z najlepszym oszacowaniem aktuariusza. Ubezpieczyciel sprzedał 100 polis, o identycznych charakterystykach wskazanych powyżej, osobom o niezależnych dalszych trwaniach życia. Zobowiązanie ubezpieczyciela jest równe świadczeniom płatnym na koniec trwania umowy. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i stopa wolna od ryzyka wynosi 3% w okresie rocznym. Opcje kwotowane na rynku finansowym wyceniane są zgodnie z modelem Blacka-Scholesa. Na rynku finansowym dostępne są rachunek bankowy wolny od ryzyka, obligacje wolne od ryzyka o dowolnym terminie zapadalności, fundusz i dowolne instrumenty pochodne oparte na funduszu. Nie ma ograniczeń w handlu na rynku finansowym.

a) Opisz ryzyko finansowe i ubezpieczeniowe, na które narażony jest ubezpieczyciel wystawiający powyższą gwarancję (2p),
b) Wyznacz wartość zobowiązania w reżimie Wypłacalność II, wykorzystaj najbliższe wartości z tablic rozkładu normalnego (2p),
c) Wyjaśnij czy ubezpieczyciel może doskonale zabezpieczyć (replikować) powyższe zobowiązanie inwestując w instrumenty dostępne na rynku finansowym (1p).

Wskazówka: wzór Blacka Scholesa dla opcji put:

$$Cena\ opcji\ put = -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT},$$
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Odpowiedzi:

a) Ryzyko finansowe związane jest ze spadkiem wartości rachunku ubezpieczeniowego poniżej gwarantowanej minimalnej stopy zwrotu ze środków zainwestowanych na rynku finansowym. Ryzyko ubezpieczeniowe związane jest z większą niż oczekiwano liczbą przeżyć w portfelu 100 polis, która doprowadzi do większej liczby świadczeń.

b) Załóżmy, że *S(0)=1*. Wtedy *S(T)* opisuje stopę zwrotu z funduszu w całym okresie trwania umowy. Wartość rachunku *F* w momencie *T* dana jest wzorem

$$F(T) = F(0) * S(T) * (1-p)^T, \quad F(0) = Składka,$$

gdzie *p* oznacza opłatę pobieraną z rachunku. Zobowiązanie ma postać

$$\begin{aligned} H &= \mathrm{N} * \max(F(T), F(0) * (1+g)^T) \\ &= \mathrm{N} * \max(F(0) * (1+g)^T - F(0) * S(T) * (1-p)^T, 0) \\ &\quad + N * F(0) * S(T) * (1-p)^T \\ &= N * (1-p)^T * F(0) * \max\left(\frac{(1+g)^T}{(1-p)^T} - S(T), 0\right) + N * F(T), \end{aligned}$$

gdzie g oznacza gwarantowaną stopę zwrotu i N opisuje losową liczbę osób dożywających końca umowy.

Wykorzystując wzór Blacka-Scholesa, wartość 1 jednostki opcji put przy parametrach

$$r = \log(1+0.03), \sigma = 0.1, T = 5, K = \frac{(1+3\%)^5}{(1-2\%)^5}, S(0) = 1,$$

jest równa 0.1562 Wartość gwarancji wynosi $(1-2\%)^5 * 10 * 0.1562 = 1.4124$. Wartość rachunku wynosi $10 * (1-2\%)^5$ = 9.0392, ponieważ cena *S(T)* jest równa *S(0)=1*.

Wartość zobowiązania, uwzględniając niezależne ryzyko śmiertelności, jest równa $100 * (1-1\%)^5 * (1.4124 + 9.0392) = 993.94$.

c) Zobowiązanie nie może być idealnie zreplikowane ponieważ połączony rynek ubezpieczeniowy i finansowy jest rynkiem niezupełnym.

<u>Przykładowa literatura:</u> Rozdział 18.2 w *"Actuarial Finance – Derivatives, Quantitative Models and Risk Management" - M. Boudreault, J.F. Renaud, Wiley, 2019.*

Zadanie 4.

Rozważamy wyłącznie ryzyko długowieczności dla aktualnego portfela rent z końca roku 2021. Kapitałowy wymóg wypłacalności dla ryzyka długowieczności dla portfela rent w reżimie Wypłacalność II na najbliższy rok kalendarzowy 2022 został wyznaczony na poziomie 50. Najlepsze oszacowania przyszłych świadczeń rentowych w reżimie Wypłacalność II w kolejnych latach kalendarzowych zostały zaprognozowane w następujący sposób:

Rok kalendarzowy i	Najlepsze oszacowanie zobowiązań (BEL) na początku roku kalendarzowego i
2022	100
2023	60
2024	20

Najlepsze oszacowanie zobowiązań jest obliczane jako wartość oczekiwana zdyskontowanych wypłat przy założeniu, że wypłata świadczeń rentowych następuje na końcu roku kalendarzowego. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 3%.

a) Wyznacz wartość zobowiązania na świadczenia rentowe w reżimie Wypłacalność II na początku 2022 roku, w tym wyznacz wartość najlepszego oszacowania (*best estimate*) i margines ryzyka (*risk margin*) przy koszcie kapitału równym 6%. Margines ryzyka zawiera wyłącznie ryzyko długowieczności. Wymogi kapitałowe dla ryzyka długowieczności, które wykorzystasz do marginesu ryzyka, należy wyznaczyć stosując aproksymację opartą na bieżącej wartości wymogu dla ryzyka długowieczności i prognozie BEL w kolejnych latach kalendarzowych (2p),

b) Wielkość środków własnych w reżimie Wypłacalność II (nadwyżka aktywów nad wartość zobowiązań) na początku 2022r. wynosi 150. Na koniec roku 2022 okazało się, że wypłacono świadczenia rentowe w wysokości 55 i aktuariusz postanowił zmienić założenia wyceny dotyczące najlepszego oszacowania przyszłych świadczeń rentowych:

Rok kalendarzowy i	Najlepsze oszacowanie zobowiązań (BEL) na początku roku kalendarzowego i
2023	70
2024	20

Kapitałowy wymóg wypłacalności dla ryzyka długowieczności na kolejny rok kalendarzowy 2023 ustalono na poziomie 40. Wyznacz wielkość środków własnych na początku roku 2023 przyjmując założenie, że aktywa lokowane są w instrumenty wolne od ryzyka – wyraźnie opisz zmiany kluczowych pozycji (2p),

c) Wyznacz miarę EVA (*Economic Value Added*) w roku kalendarzowym 2022 pomijając podatki i uwzględniając wyłącznie świadczenia rentowe i ryzyko długowieczności. Przyjmij założenie, że zysk ekonomiczny jest równy zmianie środków własnych oraz udziałowcy żądają stopy zwrotu 6% na zainwestowanych środkach równych wartości wymogu kapitałowego (1p).

Odpowiedzi:

a) Projekcja wymogów kapitałowych na początku 2022:

Rok kalendarzowy i	Wymóg kapitałowy SCR na początku roku kalendarzowego i
2022	50
2023	50*60/100=30
2024	50*20/100=10

Margines ryzyka na początku 2022:

$$RM = CoC * \sum_{i=1}^{n} \frac{SCR(i)}{\left(1+r_f\right)^i} = 6\% * \left(\frac{50}{1+3\%} + \frac{30}{(1+3\%)^2} + \frac{10}{(1+3\%)^3}\right) = 5.1584$$

Wartość zobowiązania na początku roku 2022 wynosi 100+5.1584=105.1584.

b) Oczekiwana wypłata z tytułu rent w roku 2022, zgodnie z założeniami wyceny z początku 2022, wynosi x=43 gdzie x spełnia równanie:

$$100 = \frac{x+60}{1+3\%}.$$

Wartość zobowiązania na początku roku 2023, przed zmianą założeń wyceny, wynosi więc 105.1584*(1+3%)-43-6%*50=62.3131 (BEL wynosi 100*(1+3%)-43, reszta stanowi RM).

Projekcja wymogów kapitałowych na początku 2023 po zmianie założeń wyceny:

Rok kalendarzowy i	Wymóg kapitałowy SCR na początku roku kalendarzowego i
2023	40
2024	40*20/70=11.4285

Margines ryzyka na początku 2023 po zmianie założeń wyceny:

$$RM = CoC * \sum_{i=1}^{n} \frac{SCR(i)}{\left(1+r_f\right)^i} = 6\% * \left(\frac{40}{1+3\%} + \frac{11.4285}{(1+3\%)^2}\right) = 2.9764$$

Wartość zobowiązania na początku roku 2023, po zmianie założeń wyceny, wynosi więc 70+2.9764=72.9764.

Zmiana środków własnych jest wynikiem następujących zmian:

- Strata związana ze zmianą wartości przyszłego zobowiązania na początku 2023 wynosi 72.9764-62.3131=10.633,
- Strata związana z realizacją przepływu z tytułu rent vs oczekiwany przepływ w 2022 wynosi 55-43=12,

- Stopa zwrotu na środkach własnych w 2022 wynosi 150*3%=4.5,
- Uwolnienie marginesu ryzyka pod koniec 2022 wynosi 6%*50=3.

Zmiana środków własnych w roku 2022 wynosi -10.6333-12+4.5+3=-15.1633.

c) Miara EVA w roku 2022 wynosi -15.1633-6%*50=-18.1633.

Przykładowa literatura: *Rozporządzenie Delegowane Wypłacalność II nt. wyceny pasywów, "Claims run-off uncertainty: the full picture" - M. Merz, M.V. Wüthrich, 2015* oraz *"EVA/RAROC vs. MCEV Earnings: A Unification Approach", C. Kraus, The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice 38.*

Zadanie 5.

Wymień, i krótko opisz, 5 obszarów zarządzania ryzykiem zgodnie z Rozporządzeniem Delegowanym Wypłacalność II (5p).

Odpowiedzi:

Artykuł 260 Rozporządzenia Delegowanego Wypłacalność II.

Zadanie 6.

Rozważamy ryzyko składki i ryzyko rezerw w reżimie Wypłacalność II w segmencie ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej z tytułu użytkowania pojazdów mechanicznych (segment 1) oraz w segmencie ubezpieczenia od ognia i innych szkód rzeczowych (segment 4). Miary wielkości ryzyka składki wynoszą, odpowiednio, 300 i 600, odchylenia standardowe ryzyka składki wynoszą 10% i 8%, miary wielkości ryzyka rezerw wynoszą 200 i 100, odchylenia standardowe ryzyka rezerw wynoszą 9% i 10%, współczynnik korelacji pomiędzy ryzykiem składki i ryzykiem rezerw wynosi 0.5, współczynnik korelacji pomiędzy segmentami wynosi 0.25.

a) Stosujemy agregację hierarchiczną zgodnie z Formułą Standardową. Na pierwszym poziomie agregujemy ryzyko składki z ryzykiem rezerw dla każdego segmentu oddzielnie, na kolejnym poziomie agregujemy łączne ryzyko składki i rezerw pomiędzy dwoma segmentami. Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka składki i ryzyka rezerw dla obu segmentów łącznie (zdywersyfikowany kapitał) zgodnie z Formułą Standardową (2p),
b) Wyjaśnij, przy jakich wartościach współczynnika korelacji pomiędzy segmentami otrzymamy największy i najmniejszy efekt dywersyfikacji wyznaczając zdywersyfikowany kapitał zgodnie z Formułą Standardową (1p),
c) Nadal stosujemy agregację hierarchiczną, firma postanowiła jednak w swoim modelu wewnętrznym agregować w pierwszej kolejności straty z obu segmentów w obrębie ryzyka składki i w obrębie ryzyka rezerw, a następnie agregować całkowite straty z ryzyka składki i całkowite straty z ryzyka rezerw, gdzie całkowita strata zawiera straty z obu segmentów. Wymogi kapitałowe dla ryzyka składki i ryzyka rezerw dla obu segmentów oddzielnie (kapitały przed dywersyfikacją) zostają na takim samym poziomie jak wyżej. Współczynnik korelacji pomiędzy segmentami nadal wynosi 0.25. Ile powinien wynosić współczynnik korelacji pomiędzy ryzykiem rezerw i ryzykiem składki, aby uzyskać taki sam wymóg kapitałowy jak w punkcie powyżej (2p).

Odpowiedzi:

a) Wymóg kapitałowy dla segmentu I:

$$3 * \sqrt{(300 * 0.1)^2 + (200 * 0.09)^2 + 2 * 300 * 0.1 * 200 * 0.09 * 0.5} = 126.$$

Wymóg kapitałowy dla segmentu II:

$$3 * \sqrt{(600 * 0.08)^2 + (100 * 0.1)^2 + 2 * 600 * 0.08 * 100 * 0.1 * 0.5} = 161.1087$$

Wymóg kapitałowy dla segmentu I i II:

$$\sqrt{(126)^2 + (161.1087)^2 + 2 * 126 * 161.1087 * 0.25} = 227.9953.$$

b) Zgodnie z Formułą Standardową, wzór pozwalający wyznaczyć zdywersyfikowany kapitał i współczynnik dywersyfikacji:

$$SCR = \sqrt{(SCR_1)^2 + (SCR_2)^2 + 2 * SCR_1 * SCR_2 * rho},$$

$$1 - \frac{SCR}{SCR_1 + SCR_2}.$$

Stosując Formułę Standardową, najmniejszy i największy efekt dywersyfikacji osiągniemy dla współczynnik korelacji Pearsona rho o wartościach -1 i 1.

c) Wymóg kapitałowy dla ryzyka składki:

$$3 * \sqrt{(300 * 0.1)^2 + (600 * 0.08)^2 + 2 * 300 * 0.1 * 600 * 0.08 * 0.25} = 187.9255.$$

Wymóg kapitałowy dla ryzyka rezerw:

$$3 * \sqrt{(200 * 0.09)^2 + (100 * 0.1)^2 + 2 * 200 * 0.09 * 100 * 0.1 * 0.25} = 68.0147$$

Wymóg kapitałowy dla ryzyka składki i rezerw musi spełniać równanie:

$$\sqrt{(187.92)^2 + (68.01)^2 + 2 * 187.92 * 68.01 * rho} = 227.99,$$

Z równania możemy wyliczyć współczynnik korelacji Pearsona rho = 0.4709.

Alternatywnie, zamiast 3 można było użyć wartości 2.57.

Przykładowa literatura: Rozdział 8.4 w *“Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools”, revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015.*

Zadanie 7.

Rozważamy spółkę, która posiada dwie linie biznesowe A i B o łącznym rozkładzie strat – dwuwymiarowym rozkładzie normalnym o zadanym wektorze wartości oczekiwanych i macierzy wariancji-kowariancji:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \sim \mathrm{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 100 & 15 \\ 15 & 36 \end{bmatrix} \right)$$

a) Wyjaśnij na czym polega problem alokacji zdywersyfikowanego kapitału ekonomicznego z poziomu spółki do poziomu linii biznesowych i podaj ogólny wzór alokacji kapitału metodą Eulera dla dowolnej miary ryzyka (2p),
b) Wyznacz zdywersyfikowany kapitał ekonomiczny dla spółki stosując miarę Value-at-Risk na poziomie ufności 99.5% (1p),
c) Wyznacz alokację zdywersyfikowanego kapitału ekonomicznego do poziomu linii biznesowych stosując alokację Eulera i miarę Value-at-Risk na poziomie ufności 99.5% (2p).

Odpowiedzi

a) Szczegóły można znaleźć np. w rozdziale 8.5 w *“Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools”, revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015*.

b) Ponieważ łączny rozkład strat jest rozkładem normalnym i rozkłady brzegowe są normalne, dostajemy kapitał:

$$VaR_{99.5\%}(L_1 + L_2)$$
$$= \sqrt{\left(VaR_{99.5\%}(L_1)\right)^2 + \left(VaR_{99.5\%}(L_2)\right)^2 + 2 * VaR_{99.5\%}(L_1) * VaR_{99.5\%}(L_2) * rho}$$
$$= 2.57 * \sqrt{100 + 36 + 2 * 15} = 33.1121.$$

c) Alokacja zdywersyfikowanego kapitału do linii pierwszej zgodnie z formułą Eulera dla odchylania standardowego, który jest elementem determinującym wymóg Value-at-Risk w rozkładzie normalnym (z dokładnością do stałej 2.57), wynosi

$$EC(L_1|L) = 2.57 * \frac{cov(L_1, L_1 + L_2)}{SD(L_1 + L_2)} = 2.57 * \frac{100 + 15}{\sqrt{100 + 36 + 2 * 15}} = 22.9391.$$

Alokacja do linii drugiej wynosi

$$EC(L_2|L) = 2.57 * \frac{cov(L_2, L_1 + L_2)}{SD(L_1 + L_2)} = 2.57 * \frac{36 + 15}{\sqrt{100 + 36 + 2 * 15}} = 10.1730.$$

Przykładowa literatura: Rozdział 8.5 *w "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015.*

Zadanie 8.

Wyjaśnij pojęcia, podaj przykłady oraz metody zarządzania ryzykiem:

a) Systematycznym i niesystematycznym (2p),
b) Negatywnej selekcji – *adverse selection* (1p),
c) Pokusy nadużycia – *moral hazard* (1p),
d) Wyboru modelu (1p).

Pełny punkt można otrzymać tylko w sytuacji pełnego opisu czynnika ryzyka.

Odpowiedzi:

Przykładowa literatura:

a) Rozdział 1.3-1.5 w *"Actuarial Finance – Derivatives, Quantitative Models and Risk Management" - M. Boudreault, J.F. Renaud, Wiley, 2019.*
b) Rozdziały 7.12.5, 7.12.7, 16.12.5, 16.12.7 w *"Financial Enterprise Risk Management", 2nd edition - P. Sweeting, Cambridge, 2017.*

Zadanie 9.

Firma ubezpieczeniowa posiada zobowiązanie, które ma postać opcji put na pewien indeks bazowy z ceną wykonania 80 i terminem wykonania 2 lata. Wartość zobowiązania wyceniana jest zgodnie z modelem Blacka-Scholesa przy aktualnych wartościach parametrów stopy procentowej wolnej od ryzyka, zmienności implikowanej dla opcji put i ceny indeksu bazowego. Aktualna cena indeksu bazowego wynosi 100. Aktualna zmienność implikowana dla opcji put na indeks bazowy wynosi 20% i zmienność implikowana dla opcji put na indeks bazowy nie jest zależna od ceny wykonania i terminu wykonania. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i aktualna stopa wolna od ryzyka wynosi 3% (oprocentowanie ciągłe). Firma postanawia skonstruować portfel zabezpieczający zobowiązanie. Na rynku finansowym dostępny jest rachunek bankowy płacący stopę wolną od ryzyka, indeks bazowy oraz opcja put na indeks bazowy z ceną wykonania 120 i terminem wykonania 5 lat.

a) Podaj skład portfela zabezpieczającego i wyznacz strategię *delta-vega* hedgingową (liczbę instrumentów), gdzie dopasowujemy wartości aktywów i zobowiązań oraz parametry greckie *delta* (wrażliwość względem zmiany ceny indeksu bazowego) i *vega* (wrażliwość względem zmiany zmienności implikowanej dla opcji) dla wartości aktywów i zobowiązań, wykorzystaj najbliższe wartości z tablic rozkładu normalnego (2p),
b) Wyznacz zmianę wartości portfela zabezpieczającego i zobowiązania stosując przybliżenie pierwszego rzędu oparte na parametrach greckich *delta* i *vega* w sytuacji, gdy cena indeksu bazowego wzrośnie o 1 jednostkę i zmienność implikowana dla opcji put na indeks bazowy spadnie o 1p.p, zakładając, że pozostałe parametry, w tym struktura terminowa stóp procentowych, terminy zapadalności instrumentów i wartość środków na rachunku bankowym, zostają na tym samym poziomie (2p),
c) Wyjaśnij jak zachowuje się parametr grecki *vega*, gdy termin zapadalności opcji put skraca się (1p).

Wskazówka: wzór Blacka Scholesa dla opcji put:

$$Cena\ opcji\ put = -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT},$$
$$Delta\ opcji\ put = -N(-d_1), \qquad Vega\ opcji\ put = S(0)f(d_1)\sqrt{T},$$
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Odpowiedzi:

a) Wykorzystując wzór Blacka-Scholesa, możemy wyznaczamy ceny opcji put oraz wartości parametrów delta i vega dla dwóch opcji. Podstawiając:

$$r = 0.03, \sigma = 0.2, K = 80, T = 2, S(0) = 100,$$

dostajemy - cena opcji = 2.0283, delta = -0.1266, vega = 29.3757. Podstawiając:

$$r = 0.03, \sigma = 0.2, K = 120, T = 5, S(0) = 100,$$

dostajemy - cena opcji = 19.6729, delta = -0.4398, vega = 88.1905.

Niech a oznaczę liczbę indeksów bazowych, b – liczbę opcji put z terminem wykupu 5 lat, c – wartość środków na rachunku bankowym. Rozwiązujemy układ równań, gdzie poszczególne równania odzwierciedlają ceny, parametry delta i vega dla instrumentów w portfelu zabezpieczającym i zobowiązania:

$$2.0283 = a * 100 + b * 19.6729 + c,$$
$$-0.1266 = a - b * 0.4398,$$
$$29.3757 = b * 88.1905.$$

Dostajemy $a = 0.0198, b = 0.3331, c = -6.5133$.

b) Stosujemy przybliżenie postaci:

$$\begin{aligned} &P(0, S(0) + k, \sigma(0) + h) - P\big(0, S(0), \sigma(0)\big) \\ &\qquad = P_S\big(0, S(0), \sigma(0)\big) * k + P_\sigma\big(0, S(0), \sigma(0)\big) * h \\ &= -0.1266 * 1 + 29.3757 * 0.01 = 0.1671. \end{aligned}$$

c) Wystarczyło pokazać, że $\lim_{T\to 0} S(0) f(d_1)\sqrt{T} = 0$ oraz $T \to S(0) f(d_1)\sqrt{T}$ jest malejącą funkcją dla $T < T^*$.

<u>Przykładowa literatura:</u> Rozdział 20.5 w *“Actuarial Finance – Derivatives, Quantitative Models and Risk Management” - M. Boudreault, J.F. Renaud, Wiley, 2019.*

Zadanie 10.

Rozważamy model wewnętrzny w reżimie Wypłacalność II, w którym rozważamy wyłącznie ryzyko rezerw pochodzące z jednego (pewnego) roku szkodowego. Stosujemy model Hertiga rozwoju szkód, w którym skumulowane wypłaty $(C_i, i = 0, \dots, n)$, w przyszłych latach kalendarzowych i, opisane są wzorem: $C_0 = 100$, $C_i = C_{i-1} * e^{X_i}$, gdzie $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ są niezależne oraz

Rok kalendarzowy i	μ_i	σ_i
1 (najbliższy rok kalendarzowy)	0.7	0.3
2	0,4	0.1
3	0.1	0.05

Wartość C_0 opisuje wartość świadczeń już wypłaconych przez ubezpieczyciela w poprzednich latach kalendarzowych. Podane oszacowania $(\mu_i, \sigma_i\ )$ są oszacowaniami *best estimate* dla rozkładów szkód i nie uwzględniamy błędów estymacji tychże parametrów w ocenie ryzyka rezerw. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 0% - nie uwzględniamy więc dyskontowania w poniższych obliczeniach.

a) Zapisz stratę ubezpieczyciela w horyzoncie jednorocznym i ostatecznym wykorzystując odpowiednie wyrażenia matematyczne, gdzie strata rozumiana jest jako zmiana wartości zobowiązań ubezpieczeniowych *best estimate* z tytułu szkód niewypłaconych z analizowanego roku szkodowego – wyjaśnij poszczególne komponenty zapisanej straty (2p),
b) Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka rezerw w reżimie Wypłacalność II stosując odpowiednią definicję straty i miarę Value-at-Risk (2p),
c) Wyjaśnij czy i jak Twoim zdaniem zmieni się wymóg kapitałowy dla ryzyka rezerw jeżeli uwzględnimy błąd estymacji parametrów modelu – zwiększy się, zmniejszy się, nie zmieni się (1p).

Wskazówka: Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Wtedy $E[e^X] = e^{\mu + 0.5 * \sigma^2}$.

Odpowiedzi:

a) Stratę w horyzoncie jednorocznym definiujemy jako

$$L_{1YR} = E[C_n | C_1] - E[C_n | C_0].$$

Stratę w horyzoncie ostatecznym definiujemy jako

$$L_{ULT} = E[C_n | C_n] - E[C_n | C_0] = C_n - E[C_n | C_0] = C_n.$$

Powyższe wartości oczekiwane opisują najlepsze oszacowania zobowiązania z tytułu szkód niewypłaconych pod warunkiem informacji w danym momencie czasu, który definiujemy horyzont ryzyka.

b) Zauważmy, że

$$E[C_n|C_0] = C_0 * \exp\left(\sum_{i=1}^{3} \mu_i + 0.5 * \sum_{i=1}^{3} \sigma_i^2\right) = 100 * 3.4947,$$

$$E[C_n|C_1] = C_1 * \exp\left(\sum_{i=2}^{3} \mu_i + 0.5 * \sum_{i=2}^{3} \sigma_i^2\right) = 100 * e^{0.7+0.3*X_1} * 1.6590,$$

gdzie $X_1 \sim N(0,1)$. W konsekwencji

$$VaR_{99.5\%}(L_{1YR}) = 100 * (e^{0.7+0.3*2.57} * 1.6590\text{-}3.4947)\text{=}374.0787.$$

c) Włączenie błędu estymacji parametrów powinno zwiększyć wymóg kapitałowy ponieważ uwzględnimy dodatkowe źródło niepewności w procesie wypłat.

<u>Przykładowa literatura:</u> *"Claims run-off uncertainty: the full picture" - M. Merz, M.V. Wüthrich, 2015.*

Sesja egzaminacyjna w dniu 9 czerwca 2022 r.

Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń

Arkusz ocen

Zadanie nr	Punktacja
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	