Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXV Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 10 czerwca 2022.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, n \geq 3$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym o średniej 1 i wariancji $\sigma^2 > 0$. Niech $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$. Wiadomo, że

$$\mathrm{Var}\,(S_3 | S_{12} = 3) = 45.$$

Ile wynosi σ^2?

(A) 16

(B) 18

(C) 20

(D) 22

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 2.

Zmienna losowa Y ma rozkład geometryczny Geom(p), $p \in (0,1)$ na 0,1,…, tzn.

$$P(Y=k)=(1-p)^k p, k=0,1,\ldots$$

Warunkując $Y=y$, zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem μy, gdzie $\mu>0$, tzn.

$$P(X=k|Y=y)=\frac{(\mu y)^k}{k!}e^{-\mu y}, k=0,1,\ldots$$

Ile wynosi Var(X)?

(A) $\frac{1-p^2}{p^2}\mu^2$.

(B) $\frac{\mu(1-p)(p+\mu)}{p^2}$

(C) $\frac{\mu(1-p)(p+\mu)}{p}$

(D) $\frac{1-p^2}{p^2}\mu$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 3.
Zmienne losowe $X_1,\ldots,X_n, n \geq 3$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3r^3}{x^4} & \text{dla } x \geq r \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

z nieznanym parametrem $r > 0$. Wiadomo, że

$$T = b \cdot \min(X_1,\ldots,X_n)$$

jest nieobciążonym estymatorem parametru r. Ile wynosi b?

(A) $\frac{3n}{3n+1}$

(B) $\frac{3n-2}{3n}$

(C) $\frac{3n-1}{3n}$

(D) $\frac{3n}{3n-2}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 4. Wiadomo, że zmienna losowa X ma następującą funkcję tworzącą momenty:

$$M_x(t) = \frac{1}{(1-5t)^2} \quad \text{dla } t < 1/5.$$

Jaki jest współczynnik skośności, tj.

$$\mathbb{E}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3$$

(gdzie μ jest średnią, a σ odchyleniem standardowym) tej zmiennej losowej?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $\frac{5}{2}$

(C) $\frac{2}{5}$

(D) $\sqrt{2}$

(E) $\sqrt{5}$

Zadanie 5.

Zmienna losowa U ma rozkład $\mathcal{U}(0,1)$ (tj. jednostajny na (0,1)). Która z poniższych zmiennych losowych ma gęstość

$$f(x) = \frac{50^2}{(4+x)^5}, \quad \text{dla } x \geq 1 \text{ ?}$$

(A) $S = \frac{5}{\sqrt[6]{U}} - 4$

(B) $T = \frac{6}{\sqrt[5]{1-U}} - 5$

(C) $X = \frac{4}{\sqrt[4]{1-U}} - 3$

(D) $Y = \frac{5}{\sqrt[4]{U}} - 4$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 6.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, n \geq 3$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym o średniej $\frac{1}{\theta} > 0$.

Wariancja tego rozkładu (funkcja parametru θ) wynosi $g(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$. Budujemy estymator tej wariancji postaci

$$\hat{g} = a \cdot \mathrm{ENW}(g(\theta)),$$

gdzie $\mathrm{ENW}(g(\theta))$ oznacza estymator największej wiarogodności funkcji g. Dla jakiego a estymator $\hat{g}$ jest nieobciążony?

(A) $\dfrac{n}{n+1}$

(B) $\dfrac{n}{n+2}$

(C) $\dfrac{n}{2(n+1)}$

(D) $\dfrac{2n}{n+1}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 7.

Dla niezależnych zmiennych losowych X, Y o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 1 definiujemy

$$U = X + Y, \quad V = 2X - 2Y.$$

Ile wynosi $\mathbb{P}(0 \le U \le 5,\ 10 \le V \le 20)$?

(A) $\frac{4}{3}\left(e^{-7} - e^{-4} - e^{-2} + e^{-5}\right)$

(B) $\frac{5}{3}\left(e^{-7} - e^{-4} - e^{-5} + e^{-2}\right)$

(C) $\frac{1}{3}\left(e^{-4} - e^{-7} - e^{-5} + e^{-2}\right)$

(D) $\frac{2}{3}\left(e^{-7} - e^{-4} - e^{-3} + e^{-2}\right)$

(E) 0

Zadanie 8.

Niech U_1, U_2 będą dwoma niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $(0,2)$. Zdefiniujmy $X = |U_1 - U_2|$.

Ile wynosi $\frac{\mathrm{Var}\, X}{\mathbb{E} X}$?

(A) $\frac{1}{9}$

(B) $\frac{4}{18}$

(C) $\frac{1}{18}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{2}{3}$

Zadanie 9.
Niech $X_1, X_2, \ldots$ bedą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\beta > 0$ (tj. o średniej β^{-1}). Niech N będzie niezależną od tego ciągu zmienną losową o rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej $\lambda > 0$. Zdefiniujmy

$$M_N = \min\{X_1, \ldots, X_N\},$$

przyjmujemy $M_0 = 0$. Ile wynosi $Cov(N, M_N)$?

(A) $1 - \frac{\lambda}{\beta} e^{-\lambda}$

(B) $\frac{\lambda}{\beta} e^{-\lambda}$

(C) $\frac{\lambda}{\beta}$

(D) $\frac{1}{\lambda\beta} e^{-\lambda}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 10.

X jest pojedynczą obserwacją z populacji o gęstości

$$f(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad x \in (0,1),$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Testujemy hipotezę

$$H_0 : \theta = 3, \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 2.$$

Weryfikujemy tą hipotezę testem jednostajnie najmocniejszym na poziomie $\alpha = 0.05$.
Taki test odrzuca H_0, gdy $X < c$.
Ile wynosi c? Wskaż najbliższą odpowiedź.

(A) 0.368

(B) 0.505

(C) 0.983

(D) 0.975

(E) 0.227

Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 10 czerwca 2022r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	B	
3	C	
4	D	
5	D	
6	A	
7	E	
8	D	
9	E[1]	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.

[1] UWAGA: 14.02.2023 odpowiedź została zmieniona (wcześniej błędnie była podana odpowiedź (B))