

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXXII Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 03 Marca 2020 r.**

**Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

**Czas trwania egzaminu: 120 minut**

**Zadanie 1.**

Towarzystwo ubezpieczeń majątkowych *Non-Life S.A.* sprzedaje dwa rodzaje ubezpieczeń: ubezpieczenie lotnicze oraz kompleksowe ubezpieczenie jachtów śródlądowych i morskich. Ubezpieczenia dystrybuowane są w oddzielnych kanałach dystrybucji i administrowane przez wyodrębnione biura. W ramach ubezpieczeń lotniczych towarzystwo oferuje ubezpieczenie aerocasco, OC użytkowników statków powietrznych, OC przewoźnika lotniczego oraz ubezpieczenia następstw nieszczęśliwych wypadków załóg statków powietrznych. W ramach ubezpieczenia jachtów oferuje ubezpieczenia casco jachtów, OC użytkowników oraz następstw nieszczęśliwych wypadków załogi jachtu. Rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe utworzone przez Towarzystwo inwestowane są w obligacje skarbowe oraz instrumenty dłużne gwarantowane przez jednostki samorządowe. Towarzystwo kalkuluje niezbędny kapitał ekonomiczny uwzględniając fakt, że obie grupy produktów dotyczą innego ryzyka: ryzyko lotnicze oraz ryzyko związane z żeglugą. Towarzystwo oszacowało niezbędny kapitał ekonomiczny oddzielnie dla ubezpieczeń lotniczych na poziomie 250 mln zł, oraz dla ubezpieczeń jachtów na poziomie 150 mln zł. Jednocześnie oszacowano, że korelacja pomiędzy tymi liniami biznesu wynosi 0,25. Jako aktuariusz Towarzystwa oblicz poziom kapitału ekonomicznego łącznie uwzględniając współczynnik korelacji oraz wyznacz poziom korzyści związanych z efektem dywersyfikacji linii biznesowych. Wyjaśnij wpływ dywersyfikacji na poziom kapitału ekonomicznego i jego zmiany w sytuacji kiedy rozważane ryzyka są ze sobą w 100% skorelowane pozytywnie lub negatywnie.

**Rozwiązanie:**

Ryzyka skorelowane w 100% dodatnio nie wygenerują pozytywnego efektu dywersyfikacji. W sytuacji 100% korelacji negatywnej ryzyka „zniosą” się wzajemnie, tzn. kapitał ekonomiczny będzie równy różnicy kapitałów (250-150), a efekt dywersyfikacji podwojonej wartości mniejszego z nich (300). Ogólnie, efekt dywersyfikacji występuje w sytuacji kiedy ryzyka nie są w pełni dodatnio skorelowane. Nie występuje w sytuacji korelacji dodatniej wynoszącej 100%. W tej sytuacji prawdopodobne straty wynikające z realizacji ryzyk będą niższe niż oszacowany kapitał ekonomiczny. Wynika to z faktu, że prawdopodobieństwo tych strat jest niższe od poziomu istotności z jakim został oszacowany kapitał ekonomiczny. W konsekwencji poziom kapitału jaki jest niezbędny w przypadku ryzyk skorelowanych jest niższy niż poziom kapitały jaki wynika z sumy kapitału oszacowanego oddzielnie dla każdego ryzyka.

|                           |                |
|---------------------------|----------------|
| Bez efektu dywersyfikacji | 400 000 000,00 |
| Z efektem dywersyfikacji: | 322 102 468,17 |
| efekt dywersyfikacji      | 77 897 531,83  |

**Zadanie 2.**

Zakład ubezpieczeń nabył 5-letnią obligację korporacyjną w dniu jej emisji po cenie równej wartości nominalnej, która wynosi 100.000 zł. Oprocentowanie obligacji jest stałe i wynosi 2,8% p.a. Stopa dyskontowa wynosi 1,7%. Obligacja jest tak skonstruowana, że kupony są płatne w okresach rocznych. Na rynku pojawiają się informacje, że rynkowe stopy procentowe mogą wzrosnąć w najbliższym czasie o 50 pb. Proszę obliczyć *duration* oraz odpowiedzieć na pytanie czy zmieni się cena obligacji w przypadku wzrostu stóp procentowych. Jeśli cena ulegnie zmianie to proszę podać o jaką wartość. Jako aktuariusz towarzystwa doradź zarządowi czy decyzję o ewentualnej sprzedaży obligacji warto rozważyć w sytuacji spodziewanego wzrostu czy spadku stóp procentowych?

**Rozwiązanie:**

| Wyszczególnienie | Okres (t) |          |          |           |            | Łącznie:   |
|------------------|-----------|----------|----------|-----------|------------|------------|
|                  | 1         | 2        | 3        | 4         | 5          |            |
| CF               | 2 800     | 2 800    | 2 800    | 2 800     | 102 800    | 114 000    |
| Stopa dyskontowa | 1,70%     | 1,70%    | 1,70%    | 1,70%     | 1,70%      | -          |
| PV               | 2 753,20  | 2 707,17 | 2 661,92 | 2 617,42  | 94 490,54  | 105 230,26 |
| PV * t           | 2 753,20  | 5 414,35 | 7 985,76 | 10 469,70 | 472 452,72 | 499 075,73 |

|                     |          |
|---------------------|----------|
| D=                  | 4,74     |
| zmiana wartości [%] | -2,31%   |
| zm. Wartość zł      | -2427,41 |

Najlepszy moment na inwestycję w obligacje występuje wtedy, kiedy oczekujemy spadku stóp procentowych. Natomiast nad sprzedażą obligacji korporacyjnych powinniśmy się mocno zastanawiać, kiedy RPP przewiduje wzrost stóp procentowych.

**Zadanie 3.**

Omów i dokonaj charakterystyki ryzyka operacyjnego na jakie narażony jest zakład ubezpieczeń oraz wymień główne jego źródła. Czy zmieni się poziom ryzyka operacyjnego w sytuacji, kiedy zakład ubezpieczeń planuje zmienić system informatyczny z własnego i przejść na pracę w tzw. chmurze wykorzystując usługę obcą? Usługa będzie dostarczana przez globalny podmiot nie związany z zakładem ubezpieczeń o bardzo dobrej światowej renomie. Czy umowa podpisana przez zakład ubezpieczeń będzie podlegała pod regulacje ustawowe dotyczące outsourcingu?

**Rozwiązanie:**Definicja:

Ryzyko operacyjne instytucji ubezpieczeniowej można definiować jako niebezpieczeństwo wystąpienia strat o charakterze bezpośrednim lub pośrednim, wynikające z niewłaściwych lub zawodnych procedur wewnętrznych oraz działania ludzi (International Association of Insurance Supervisors, 2004).

Do najważniejszych źródeł ryzyka operacyjnego w działalności zakładu ubezpieczeń można zaliczyć (Basel Committee on Banking Supervision, 2003a, 2003b):

Nadużycia wewnętrzne:

- straty generowane przez nieprofesjonalną lub przestępczą działalność pracowników zakładu lub osób z nią związanych, np. agentów;

Nadużycia zewnętrzne

- straty generowane przez działalność osób niezwiązanych z zakładem, tj. np. włamania do systemów informatycznych i baz danych; - politykę kadrową i bezpieczeństwo pracy - kwestie związane z nieprzebrzeganiem wymogów prawa pracy i roszczenia pracowników z tego tytułu; - produkty, klientów oraz praktyki biznesowe - dotyczy naruszenia obowiązków powierniczych, np. wykorzystywania poufnych informacji; - zakłócenia ciągłości działalności oraz awarie systemów komputerowych, zawodność sprzętu informatycznego i oprogramowania; - zarządzanie procesami - problemy z właściwą obsługą transakcji, np. przy rejestracji, monitorowaniu, raportowaniu.

Tak umowa będzie podlegała pod ustawowe regulacje dotyczące outsourcingu.

Źródła:

International Association of Insurance Supervisors. (2004). Guidance Paper on Investment Risk Management. Guidance Paper, (9).

Basel Committee on Banking Supervision. (2003a). Overview of The New Basel Capital Accord - Consultative Document. Basel: Basel Committee on Banking Supervision. Basel Committee on Banking Supervision. (2003b). Sound Practices for the Management and Supervision of Operational Risk. Basel: Basel Committee on Banking Supervision.

**Zadanie 4.**

Towarzystwo ubezpieczeń *Four S.A.* bada zależność pomiędzy wartością szkód zaistniałych w dwóch klasach ubezpieczenia: Klasa X i Klasa Y. Historyczne wartości szkód dla danych klas ubezpieczeń są następujące:

**Tablica 4.1** Historyczne wartości szkód zaistniałych w dwóch klasach ubezpieczenia dla towarzystwa *Four S.A.* (w tys. zł.).

| Rok                         | Klasa X    | Klasa Y      |
|-----------------------------|------------|--------------|
| 2015                        | 165        | 760          |
| 2016                        | 127        | 395          |
| 2017                        | 117        | 415          |
| 2018                        | 228        | 689          |
| 2019                        | 209        | 559          |
| <b>Razem</b>                | <b>846</b> | <b>2 818</b> |
| <b>Średnia arytmetyczna</b> | 169,2      | 563,6        |

Źródło: materiały wewnętrzne Towarzystwa *Four S.A.*

4.a) Na podstawie danych dotyczących wartości szkód (tablica 4.1) oblicz współczynnik korelacji *rho* Pearsona ( $r$ ) oraz *tau* Kendalla ( $\tau$ ).

4.b) Zinterpretuj wynik dla obu wyliczonych współczynników. Na podstawie otrzymanego wyniku zasugeruj, z jakimi rodzajami klas ubezpieczeń możemy mieć do czynienia. Odpowiedz na pytanie: czy ewentualnie poziom szkód w danych klasach może być determinowany wspólnie oddziaływującym czynnikiem ryzyka, czy mogą istnieć inne czynniki mające wpływ na poziom szkód w poszczególnych klasach oddzielnie (niezależnie).

**Rozwiązanie:**

4a) Pearsona ( $r$ )

| Rok                  | Klasa X    | Klasa Y      | $X-\mu_x$ | $Y-\mu_y$ | $(X-\mu_x)^2$  | $(Y-\mu_y)^2$    | $(X-\mu_x)*(Y-\mu_y)$ |  |  |        | T-1             | 4            |
|----------------------|------------|--------------|-----------|-----------|----------------|------------------|-----------------------|--|--|--------|-----------------|--------------|
| 2015                 | 165        | 760          | -4,2      | 196,4     | 17,6           | 38 573,0         | -824,88               |  |  |        | S <sub>A</sub>  | 48,9         |
| 2016                 | 127        | 395          | -42,2     | -168,6    | 1 780,8        | 28 426,0         | 7114,92               |  |  |        | S <sub>B</sub>  | 161,9        |
| 2017                 | 117        | 415          | -52,2     | -148,6    | 2 724,8        | 22 082,0         | 7756,92               |  |  | Cov    | S <sub>AB</sub> | 5309,35      |
| 2018                 | 228        | 689          | 58,8      | 125,4     | 3 457,4        | 15 725,2         | 7373,52               |  |  |        |                 |              |
| 2019                 | 209        | 559          | 39,8      | -4,6      | 1 584,0        | 21,2             | -183,08               |  |  | $\rho$ |                 | <b>0,671</b> |
| <b>Razem</b>         | <b>846</b> | <b>2 818</b> |           |           | <b>9 564,8</b> | <b>104 827,2</b> | <b>21 237,4</b>       |  |  |        |                 |              |
| Średnia arytmetyczna | 169,2      | 563,6        |           |           |                |                  |                       |  |  |        |                 |              |

Kendalla ( $\tau$ )

| Rok  | Klasa X | Klasa Y |  |   |   |   |   | T         |      |
|------|---------|---------|--|---|---|---|---|-----------|------|
| 2017 | 117     | 415     |  | z |   |   |   | $\rho_m$  | 5    |
| 2016 | 127     | 395     |  | m | m |   |   | $\rho_z$  | 7    |
| 2015 | 165     | 760     |  | m | m | z |   | $t_{A,B}$ | 3    |
| 2019 | 209     | 559     |  | m | m | z | m |           | 0,40 |
| 2018 | 228     | 689     |  |   |   |   |   |           |      |

4b)

Współczynnik Pearsona zależy od rozkładu szkód i powinien być stosowany, w sytuacji kiedy rozkład szkód ma charakter rozkładu eliptycznego (np. rozkład normalny, T-Studenta, Laplace). W pozostałych przypadkach wynik może okazać się nieważny.

Współczynnik Kendalla zależy jedynie od nadanych rang i niezależnie od rodzaju rozkładu szkód wynik zawsze jest ważny.

Policzone współczynniki mają wartość pozytywną, co sugeruje, że wartości szkód poruszają się w tym samym kierunku (są zależne) i mogą wynikać ze realizacji określonego ryzyka niejako wspólnie. Ryzyka powodujące szkody z klasy X i Y są ze sobą skorelowane. Jednak wartości współczynników są niższe od 1, co może świadczyć także o tym, że na wartości szkód w podanych klasach ma wpływ jeszcze inny rodzaj ryzyka (ryzyko oddziaływujące oddzielnie na wartość szkód w klasie X i klasie Y).

Przykładem klasy szkód może być ubezpieczenie od gradobicia i ubezpieczenie autocasco. W obu przypadkach wartość zgłaszanych szkód uzależniona jest od warunków pogodowych, ale oddziałują także inne czynniki niezależnie.

**Zadanie 5.**

Rozpatrujemy akcję zwykłą przy założeniu, że inwestor (zakład ubezpieczeń) zamierza ją trzymać bezterminowo. Wymagana stopa zwrotu wynosi 10%. Obecnie spółka wypłaciła dywidendę w wysokości 60 zł. Zarząd inwestora rozpatruje dwa scenariusze. W pierwszym zakłada, że spółka będzie rozwijać się w stałym tempie, co wpłynie na wzrost dywidendy w tempie 5% ( $g$ ). W drugim scenariuszu zakłada się rozwój dwufazowy podlegający na tym, że przez pierwsze 4 lata dywidenda będzie rosła o 8%, a następnie cały czas w stałym tempie 5%. Jako aktuariusz towarzystwa ubezpieczeń dokonaj wyceny akcji przy zastosowaniu modelu stałej dywidendy, modelu stałego wzrostu dywidendy (Gordona-Shapiro) oraz modelu dwóch faz.

**Rozwiązanie:**1. Model stałej dywidendy

$$P = D/r = 60/0,1 = \underline{600 \text{ zł}}$$

2. Model stałego wzrostu dywidendy (Gordona-Shapiro)

Stale tempo wzrostu dywidendy  $g=5\%$

$$P = D(1+g)/(r-g) = 60(1+0,05)/0,1-0,05 = 60*1,05/0,05 = \underline{1.260 \text{ zł}}$$

3. Model dwóch faz

| Rok (t)      | Dywidenda ( $D_t$ ) | $D_t / (1+r)^t$ |
|--------------|---------------------|-----------------|
| 1            | 64,8                | 58,91           |
| 2            | 69,98               | 63,62           |
| 3            | 75,58               | 68,71           |
| 4            | 81,63               | 74,21           |
| <b>Razem</b> |                     | <b>265,45</b>   |

Cena akcji uwzględniająca zdyskontowane wartości dywidendy z dwóch faz

**1436,29**

**Zadanie 6.**

Stowarzyszenie niezależnych doradców podatkowych planuje powołanie własnego towarzystwa ubezpieczeń. Celem działania towarzystwa będzie objęcie ochroną ubezpieczeniową odpowiedzialności zawodowej doradców (*professional liability insurance PLI*) będących członkami stowarzyszenia. Działanie to ma na celu zaproponowanie doradcom ubezpieczenia *PLI* ze składką niższą od składki rynkowej, bez uwzględniania ich historii szkodowej. Analiza potrzeb doradców wykazała, że każdy z doradców wykupi polisę jeśli jej cena będzie niższa od ceny rynkowej o 20%, i tak przyjmij w obliczeniach. W obliczeniach załóż także, że szkody są od siebie niezależne, inwestowany jest przychód ze składek netto (składki pomniejszone o narzut kosztów). Pozostałe dane są następujące informacje:

- stowarzyszenie zrzesza 3.000 doradców,
- składka dotycząca podobnych polis w okresie ostatnich trzech lat na doradcę wyniosła 2.900 zł/rocznie, w tym 400 zł to narzuty na koszty;
- w ostatnim roku składka rynkowa wzrosła do 3.500 zł., narzut kosztów pozostał ten sam.

**Tablica 6.1.** Parametry opisujące szkody z portfela.

|   |                                 |             |
|---|---------------------------------|-------------|
|   | 99,5% szkód:                    | 0,5% szkód: |
| Średni poziom szkód   | 18.000 zł,                      | 600 tys. zł |
| Częstość szkód w ostatnim roku  | 0,1                             |             |
| Odchylenie standardowe wartości szkód   | 25% wartości zagregowanej szkód |             |
| <b>Percentyl 99,5 rozkładu szkód znajduje się na poziomie 4 odchylenia standardowego powyżej wartości średniej szkód zagregowanych.</b> |                                 |             |

**Tablica 6.2.** Parametry opisujące ryzyko działalności lokacyjnej.

|  |                                    |
|--|------------------------------------|
| Oczekiwana stopa zwrotu z portfela lokat   | 2,6%                               |
| Odchylenie standardowe stopy zwrotu z portfela   | 20% średnich dochodów z inwestycji |
| Percentyl 0,5 rozkładu dochodów z inwestycji znajduje się na poziomie 2,2 odchylenia standardowego powyżej wartości średniej           |                                    |
| Oczekiwane straty z portfela inwestycyjnego ( <i>credit default losses</i> ) oszacowano na poziomie 0,6% rocznie                       |                                    |
| Odchylenie standardowe rozkładu strat  | 50% wartości średniej              |
| <b>Percentyl 99,5 rozkładu strat z portfela inwestycyjnego znajduje się na poziomie 2,5 odchylenia standardowego powyżej średniej.</b> |                                    |

**Tablica 6.3.** Zidentyfikowane parametry ryzyka operacyjnego.

|                   | <b>Prawdopodobieństwo wystąpienia</b> | <b>Szacowane straty [tys. zł]</b> |
|-------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| <b>Ryzyko I</b>   | 0,05                                  | 650                               |
| <b>Ryzyko II</b>  | 0,04                                  | 750                               |
| <b>Ryzyko III</b> | 0,003                                 | 1.500                             |

Zgodnie z obowiązującymi przepisami prawa organ nadzoru wymaga, aby Towarzystwo ubezpieczeniowe posiadało kapitał regulacyjny w wysokości co najmniej najlepszego



---

oszacowania rezerw wynikających z zawartych polis ubezpieczeniowych. Oszacowany kapitał powinien gwarantować, że Towarzystwo będzie w stanie realizować zobowiązania wynikające z zawartych polis ubezpieczeniowych z prawdopodobieństwem 99,5%, przy założeniu niekorzystnego scenariusza rozwoju szkód.

Jako aktuariusz Towarzystwa **oblicz początkowy minimalny kapitał regulacyjny dla planowanego Towarzystwa ubezpieczeń**, opisując przyjęte założenia. Ryzyko rynkowe i ryzyko kredytowe są zależne w 100%. Koszty szkód oraz ryzyko operacyjne są niezależne od ryzyka rynkowego i kredytowego.

---

### **Rozwiązanie:**

Wartość minimalnego wymogu kapitałowego wynosi około **6.554.000 zł**

Wartość ta może różnić się w zależności od przyjętych ostatecznych założeń. Różnica powinna wahać się w granicach 1,5 mln zł.

Zadanie było pozytywnie ocenione jeśli kandydat wykazał poprawny tok rozumowania oraz zastosował właściwe podejście do wyliczenia wymogu kapitałowego.

Kandydat powinien także zwrócić uwagę na fakt, że prawdopodobieństwo ryzyka III jest poza 99,5 percentylem dlatego narzut kapitałowy w związku z tym ryzykiem jest równy zero.

W przypadku ryzyka I oraz II można było założyć, że ryzyka te są rozłożone w ogonie rozkładu i przyjąć wielkość odpowiednio niższą (np. o 10%).

**Zadanie 7.**

Na podstawie danych zawartych w tabelicy 7.1 oszacuj wielkość rezerwy na niewypłacone odszkodowania i świadczenia na koniec analizowanego okresu. W celu dokonania kalkulacji wykorzystaj prostą technikę *chain ladder (CL)* oraz metodę *Bornhuettera-Fergusona (B-F)*. Następnie porównaj otrzymane wyniki i uzasadnij, czy można jednoznacznie stwierdzić, która metoda daje bardziej adekwatny wynik dotyczący szacowania poziomu rezerw techniczno-ubezpieczeniowych. W obliczeniach wykorzystaj także dane zawarte w tabelicy 7.2. Jako miarę ekspozycji w metodzie *B-F* przyjmij składkę zarobioną.

**Tablica 7.1.** Trójkąt szkód nieskumulowanych (w mln. zł.).

| Lata zajścia szkody (i) | Lata rozwoju szkody (j) |     |     |     |
|-------------------------|-------------------------|-----|-----|-----|
|                         | 0                       | 1   | 2   | 3   |
| 0 (2016)                | 750                     | 574 | 375 | 205 |
| 1 (2017)                | 650                     | 452 | 315 |     |
| 2 (2018)                | 725                     | 315 |     |     |
| 3 (2019)                | 640                     |     |     |     |

**Tablica 7.2.** Parametry portfela ubezpieczeń towarzystwa.

|      | Liczba czynnych polis<br>[tys. szt.] | Składka przypisana brutto<br>[mln. zł] | ULR<br>(współczynnik<br>szkodowości) | Zmiana stanu rezerwy składki brutto [mln zł] |
|------|--------------------------------------|--|--------------------------------------|--|
|      | 1                                    | 2                                      | 3                                    | 4  |
| 2016 | 110                                  | 690                                    | 97%                                  | 115  |
| 2017 | 104                                  | 715                                    | 99%                                  | 95   |
| 2018 | 112                                  | 810                                    | 96%                                  | 110  |
| 2019 | 116                                  | 985                                    | 98%                                  | 125  |

**Rozwiązanie:**

Wartość rezerwy IBNR wyliczona metodą CL wynosi 1.490 mln zł.

Wartość rezerwy wyliczona metoda B-F wynosi 703 mln zł.

Wyliczając rezerwę IBNR dwoma wskazanymi metodami otrzymaliśmy różnicę na poziomie 788 mln zł. co stanowi 53% rezerwy wyliczonej metodą Chain-Ladder i o taką kwotę byłby lepszy wynik finansowy zakładu ubezpieczeń gdyby zastosował metodę B-F. Nie można jednoznacznie stwierdzić, która z powyższych metod jest lepsza i powinna być stosowna. Przy wyliczaniu rezerwy IBNR dla danej linii należy również uwzględnić jej specyfikę.

**Zadanie 8.**

Towarzystwo reasekuracyjne R8 S.A. podjęło działania zmierzające do ubezpieczenia ryzyka operacyjnego zakładów ubezpieczeń. Kilku z obecnych klientów towarzystwa R8 S.A. zawnioskowało o stworzenie takiej oferty. Każde z towarzystw przesłało do R8 S.A. dane dotyczące poziomu szkód wynikających z realizacji ryzyka operacyjnego z ostatnich kilku lat. Na tej podstawie towarzystwo R8 S.A. planuje ustalić poziom składki rocznej za proponowane ubezpieczenie. Szeregi czasowe rocznych wartości szkód związanych z danym ryzykiem dla klientów R8 S.A., którzy zgłosili swoje zainteresowanie mają następujące parametry statystyczne:

**Tablica 8.1.** Parametry statystyczne szeregów czasowych szkód wynikających z ryzyka operacyjnego klientów R8 S.A. (dane w zł).

| Klient   | Średnia arytmetyczna | Wariancja      |
|----------|----------------------|----------------|
| TU1 S.A. | 20 000,00            | 180 000 000,00 |
| TU2 S.A. | 18 000,00            | 155 000 000,00 |
| TU3 S.A. | 12 000,00            | 45 000 000,00  |

W związku z brakiem doświadczenia z ubezpieczeniem przedmiotowego ryzyka i z jego wyceną, w celu skalkulowania składki rocznej za takie ubezpieczenie zaproponowano następujące kroki:

- I. Wyznaczenie składki w prosty sposób jako średnia arytmetyczna szkód powiększona o 30% w celu pokrycia kosztów towarzystwa R8 S.A.
- II. Bardziej zaawansowany sposób polegający na następujących krokach:
  - 2.a) dopasowanie rozkładu gamma za pomocą momentów (przy zastosowanej parametryzacji rozkładu  $E(X) = \alpha / \lambda$ ,  $V(X) = \alpha / \lambda^2$  gamma: ) do całkowitych szkód z tytułu ryzyka operacyjnego, zaraportowanych przez klientów R8 S.A.,
  - 2.b) wyliczenie wymogu kapitałowego w ujęciu jednostkowym przy pomocy VaR z założonym poziomem ufności równym 99,5%,
  - 2.c) wyznaczenie składek jako wartość oczekiwanej szkód zaraportowanych, powiększonych o koszt kapitału oraz powiększonych o 18% narzutu na pokrycie kosztów i zapewnienie zakładanego poziomu zysku. Koszt kapitału został określony jako 6% wymogu kapitałowego w ujęciu jednostkowym.

Jako aktuariusz Towarzystwa R8 S.A. oblicz poziom składek dla każdego z klientów R8 S.A. w obu wariantach, wykorzystując parametry statystyczne podane w tablicy 8.1 oraz wartości strat z rozkładu gamma (tablica 8.2) dla 0,995 kwantyla.

**Tablica 8.2.** Kwantyle rzędu 0,995 dla rozkładu gamma dla danych parametrów  $\alpha$  i  $\lambda$ 

| <b>Lambda (<math>\lambda</math>)</b> | <b>0,00011</b> | <b>0,00012</b> | <b>0,00027</b> |
|--------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>Alpha (<math>\alpha</math>)</b>   |                |                |                |
| <b>2,22</b>                          | 70 710         | 67 655         | 29 462         |
| <b>2,09</b>                          | 68 444         | 65 487         | 28 518         |
| <b>3,20</b>                          | 86 611         | 82 868         | 36 088         |

Odpowiedz dodatkowo na poniższe pytania:

- (i) Jaki byłby wymóg kapitałowy dla R8 S.A., gdyby wszyscy klienci zdecydowali się na zawarcie umowy ubezpieczenia przy danym poziomie składek przy założeniu, że ryzyka operacyjne poszczególnych klientów są nieskorelowane.
- (ii) Jaki byłby wymóg kapitałowy dla R8 S.A., gdyby wszyscy klienci zdecydowali się na zawarcie umowy ubezpieczenia przy danym poziomie składek oraz przy założeniu, że ryzyko operacyjne TU3 S.A. jest zależne od ryzyka operacyjnego TU2 S.A. ponieważ oba podmioty należą do jednej grupy kapitałowej. Korelacja pomiędzy ryzykiem operacyjnym TU3 S.A., a ryzykiem operacyjnym TU2 S.A. wynosi 0,5.

---

### Rozwiązanie:

#### Wariant I

| Klient R8 S.A. | Składka ubezpieczeniowa |
|----------------|-------------------------|
| TU 1 S.A.      | <b>26 000,00</b>        |
| TU 2 S.A.      | <b>23 400,00</b>        |
| TU3 S.A.       | <b>15 600,00</b>        |

#### Wariant II

##### Kroki

Stosując metodę momentów możemy zapisać, że parametry rozkładu są równe:

$$E(X) = \alpha / \lambda$$

$$V(X) = \alpha / \lambda^2$$

stąd, po przekształceniach otrzymujemy:

$$\lambda = E(X) / V(X)$$

$$\alpha = E(X)^2 / V(X)$$

Wyliczenie parametrów zestawiono poniżej:

| Klient R8 S.A. | Alpha( $\alpha$ ) | Lambda ( $\lambda$ ) |
|----------------|-------------------|----------------------|
| TU 1 S.A.      | 2.22              | 0.00011              |
| TU 2 S.A.      | 2.09              | 0.00012              |
| TU3 S.A.       | 3.20              | 0.00027              |

Na podstawie wartości 99,5 kwantyla z tablic rozkładu gamma dla obliczonych parametrów alpha i lambda otrzymujemy wymóg kapitałowy dla poszczególnych klientów

| Klient R8 S.A. | Wymóg kapitałowy |
|----------------|------------------|
| TU 1 S.A.      | 70,709.88        |
| TU 2 S.A.      | 65,486.75        |
| TU3 S.A.       | 36,087.78        |

Koszt kapitału stanowi 6%  
wymogu kapitałowego 0.06

| Klient R8 S.A. | Koszt kapitału |
|----------------|----------------|
| TU 1 S.A.      | 4,242.59       |
| TU 2 S.A.      | 3,929.20       |
| TU3 S.A.       | 2,165.27       |

Uzględniając narzut w wysokości 18% składki policzone dla poszczególnych klientów sa równe:

1.18

| Klient R8 S.A. | Składka ubezpieczeniowa |
|----------------|-------------------------|
| TU 1 S.A.      | <b>28,606.26</b>        |
| TU 2 S.A.      | <b>25,876.46</b>        |
| TU3 S.A.       | <b>16,715.01</b>        |

Wymóg kapitałowy w sytuacji przyjęcia oferty przez wszystkich klientów R8 S.A. wynosi

**102,911.26**

Wymóg kapitałowy przy założeniu korelacji pomiędzy ryzykiem TU3 S.A. a TU2 S.A.

**113,815.64**

**Zadanie 9.**

Osobie 30-letniej wystawiono 20-letnią polisę na życie ze świadczeniem w wysokości 15.000 zł. Świadczenie to płatne jest na koniec roku śmierci. Zawarta umowa ubezpieczenia przewiduje ponadto zwrot składek netto bez odsetek w formie renty 10-letniej w przypadku dożycia wieku 50 lat wypłacanej co miesiąc (nie dłużej niż do 60 roku życia). Przy podanych wartościach funkcji komutacyjnych  $D$  oraz  $N$  (patrz tablica 9) oraz przy założeniu, że zgony mają rozkład jednostajny w ciągu roku (*uniform distribution of death assumption*) oblicz miesięczną składkę netto dla tego ubezpieczenia. Ponadto wiadomo że, efektywna stopa dyskonta  $d$  wynosi 5%, przybliżone wartości parametrów rent śródrocznych  $\alpha(12)=1, \beta(12)= 0,4583$ .

**Tablica 9.** Dane wartości funkcji komutacyjnych  $D$  i  $N$ .

| Dana funkcja komutacyjna | Wiek [lata] |           |           |
|--------------------------|-------------|-----------|-----------|
|                          | <b>30</b>   | <b>50</b> | <b>60</b> |
| <b>D</b>                 | 8.000       | 4.800     | 2.500     |
| <b>N</b>                 | 120.000     | 64.500    | 27.700    |

**Rozwiązanie:**

Poziom składki miesięcznej netto wynosi około 30 zł.

**Zadanie 10.**

Podaj formułę, opisz istotę i interpretację wskaźnika Herfindahla oraz wskaż obszary zastosowania wskaźnika w procedurze wyliczania wymogów kapitałowych dla zakładów ubezpieczeń?

**Rozwiązanie:**

Wskaźnik nazywany również indeksem HHI identyfikuje poziom konkurencji na danym rynku i pomaga ocenić potencjalne skutki koncentracji przedsiębiorstw. Wskaźnik jest wykorzystywany w procesie kalkulacji wymogów kapitałowych w związku z ryzykiem składki i rezerw w module ubezpieczeń majątkowych oraz w podmodule ryzyka katastrof naturalnych w module ubezpieczeń majątkowych, gdzie oznacza efekt dywersyfikacji geograficznej.

$$HHI = \sum_{i=1}^N u_i^2 ,$$

Gdzie,  $u_i$  – udział  $i$ -tego przedsiębiorcy w rynku



**Egzamin dla Aktuariuszy****Sesja egzaminacyjna w dniu 03 Marca 2020r.****Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń****Arkusz ocen**

| Zadanie nr | Punktacja |
|------------|-----------|
| 1          |           |
| 2          |           |
| 3          |           |
| 4          |           |
| 5          |           |
| 6          |           |
| 7          |           |
| 8          |           |
| 9          |           |
| 10         |           |
|            |           |