

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 2 marca 2020r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Założmy, że chcemy wyestymować $\int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx$ poprzez symulacje, dwoma metodami. Ustalmy $n \geq 3$.

- Metoda 1. Symulujemy niezależne zmienne losowe $U_{j,1}, U_{j,2}, \dots, U_{j,n}, j = 1, 2$ o rozkładzie jednostajnym $U(0, 1)$. Estymator

$$\hat{Y}_a = \hat{Y}_1 - \hat{Y}_2,$$

gdzie

$$\hat{Y}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{1,i}, \quad \hat{Y}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{2,i}^2.$$

- Metoda 2. Symulujemy niezależne zmienne losowe U_1, U_2, \dots, U_n o rozkładzie jednostajnym $U(0, 1)$. Estymator

$$\hat{Y}_b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (U_i - U_i^2).$$

W obu przypadkach mamy $E\hat{Y}_a = E\hat{Y}_b = 1/6$. Ile wynosi $\frac{\text{Var}(\hat{Y}_a)}{\text{Var}(\hat{Y}_b)}$?

- (A) 32
- (B) 31
- (C) $\frac{180}{31}$
- (D) 11
- (E) 6

Zadanie 2.

Niech

$$X = 4\sqrt{-2\ln(1-U)}, \quad \text{gdzie } U \sim U(0,1).$$

Ile wynosi $\frac{EX^4}{EX^2}$?

(A) 128

(B) 50

(C) 64

(D) 32

(E) $\frac{1}{3}$

Zadanie 3.

Niech $N \geq 7$. W urnie I umieszczono N białych, a w urnie II umieszczono N czarnych kul. Rozważmy następującą procedurę:

W jednym kroku wybieramy losowo (tj. z rozkładem jednostajnym) kulę z pierwszej urny oraz, także losowo, kulę z drugiej urny (niezależnie). Następnie kule te są zamieniane.

Niech X_k oznacza liczbę kul czarnych w urnie I po wykonaniu k kroków powyższej procedury.

Ile wynosi $\rho(m) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(X_k = m)$?

(A) $\rho(0) \binom{N}{m}, m = 1, \dots, N$, gdzie $\rho(0) = \left[1 + \sum_{i=1}^N \binom{N}{i} \right]^{-1}$.

(B) $\rho(0) \left(\frac{m}{N}\right)^2, m = 1, \dots, N$, gdzie $\rho(0) = \left[1 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{i}{N}\right)^2 \right]^{-1}$.

(C) $\rho(0) \left(\frac{m}{N}\right), m = 1, \dots, N$, gdzie $\rho(0) = \left[1 + \sum_{i=1}^N \frac{i}{N} \right]^{-1}$.

(D) $\rho(0) \binom{N}{m}^2, m = 1, \dots, N$, gdzie $\rho(0) = \left[1 + \sum_{i=1}^N \binom{N}{i}^2 \right]^{-1}$.

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 4.

Wektor (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{y}} & \text{dla } (x, y) \in (0, 1)^2, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

$\text{Cov}(X, \max(X, Y))$ wynosi:

(A) $\frac{1}{21\sqrt{2}}$

(B) $\frac{1}{21}$

(C) $\frac{2}{45}$

(D) $\frac{8}{189}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 5.

Niech Z_1, Z_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym $N(0, 1)$. Zdefiniujmy

$$\begin{aligned}X &= 1 + pZ_1, \\Y &= q + Z_1 + \sqrt{3}Z_2.\end{aligned}$$

Wiadomo, że

$$E[X|Y = 8] = 2, \quad \text{Var}[X|Y = 7] = \frac{3}{4}.$$

Ile wynoszą parametry p i q ?

- (A) $p = 2, q = 1$
- (B) $p = 1, q = 4$
- (C) $p = 1, q = 1$
- (D) $p = 6, q = 2$
- (E) Żadne z powyższych

Zadanie 6.

Zakładamy, że miesięczna liczba szkód komunikacyjnych w pewnym mieście ma rozkład Poissona z parametrem θ (liczby szkód w różnych miesiącach są niezależnymi zmiennymi losowymi). Oznaczmy liczbę szkód w miesiącu i -tym przez X_i . Rozkład (a priori) parametru θ ma następującą gęstość:

$$p(\theta) = \frac{8}{3}\theta^3 e^{-2\theta}, \quad \theta \geq 0.$$

W ciągu pierwszych sześciu miesięcy wystąpiły następujące liczby szkód:

$$X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 5, X_4 = 5, X_5 = 1, X_6 = 4.$$

Ile wynosi wartość oczekiwana rozkładu *a posteriori* parametru θ , tj.

$$E(\theta | X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 5, X_4 = 5, X_5 = 1, X_6 = 4)?$$

- (A) 3
- (B) $3\frac{1}{3}$
- (C) 4
- (D) 2
- (E) Żadne z powyższych

Zadanie 7.

Mówimy, że PIN składający się z 5 cyfr jest *poprawny* jeśli wszystkie cyfry są *różne*.
Zatem zbiór poprawnych PINów to

$$\mathcal{E} = \{(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) : d_i \in \{0, \dots, 9\}, i \in \{1, \dots, 5\}, \forall (i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}) d_i \neq d_j\}.$$

Ze zbioru \mathcal{E} wylosowano jednostajnie (i niezależnie od siebie) dwa PINy. Niech X oznacza liczbę cyfr, które występują w obu PINach.

Ile wynosi $\text{Var}(X)$?

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{7}{10}$

(C) $\frac{2}{5}$

(D) $\frac{25}{36}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 8.

Ustalmy $n \geq 7$. Wybierzmy podzbiór $X \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ losowo (jednostajnie – każdy podzbiór ma tę samą szansę zostania wybranym), oznaczmy przez $|X|$ liczbę elementów zbioru X . Niech Y oznacza odwrotność $1 + |X|$, tzn. $Y = \frac{1}{1 + |X|}$.

Ile wynosi EY ?

(A) $\frac{2}{2+n}$

(B) $\frac{1 - 2^{-n}}{n+1} + \frac{1}{2}$

(C) $\frac{2 - 2^{-n}}{n+1}$

(D) $\frac{5 - 2^{-n+2}}{2(n+1)}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 9.

Niech X_1, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie

$$P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 1/2, i = 1, \dots, n.$$

Dla tak wylosowanego ciągu niech Y oznacza liczbę maksymalnych podciągów złożonych z samych 0 lub 1. Dla przykładu, dla $(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$ maksymalne podciągi to

$$(\underline{0}, \underline{0}, \underline{1}, \underline{0}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}),$$

zatem $Y = 5$.

Wiadomo, że $EY = 51$. Ile wynosi n ?

- (A) 100
- (B) 101
- (C) 102
- (D) 103
- (E) Żadne z powyższych

Zadanie 10.

Niezależne zmienne losowe X_1, \dots, X_n pochodzą z rozkładu wykładniczego z parametrem λ o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{jeśli } x \geq 0, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Chcemy skonstruować estymator trzeciego momentu, tj. $\mu_3(\lambda) = EX_1^3 = \frac{6}{\lambda^3}$ postaci

$$\hat{\mu}_3 = \alpha MLE(\mu_3(\lambda)),$$

gdzie $MLE(\mu_3(\lambda))$ jest estymatorem największej wiarygodności funkcji $\mu_3(\lambda)$. Ile musi wynosić stała α , żeby estymator $\hat{\mu}_3$ był nieobciążony?

(A) $\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$

(B) $\frac{n}{(n+1)}$

(C) $\frac{2(n+2)}{(n+1)}$

(D) $\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

(E) Żadne z powyższych

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 2 marca 2020r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja [♦]
1	B	
2	C	
3	D	
4	D	
5	B	
6	A	
7	D	
8	E	
9	B	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.