

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 2 marca 2020r.

Matematyka finansowa

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Rozważmy model chwilowej stopy procentowej, zadany następującym równaniem:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad a, b, \sigma > 0, \quad 2ab > \sigma^2,$$

gdzie $W(t)$ jest procesem Wienera.

Niech $P(r(t); t; T)$ opisuje cenę w chwili t obligacji zerokuponowej wygasającej w momencie T i o nominale PLN 1.

Wiadomo, iż:

- $P(2\%; 0; 0.5) = 0.985$ oraz;
- $P(5\%; 0.5; 1) = 0.970$.

Proszę określić ile wynosi $P(7\%; 1; 1.5)$ (proszę podać najbliższą wartość):

- (A) 0.962
- (B) 0.960
- (C) 0.958
- (D) 0.956
- (E) 0.954

Zadanie 2.

Rozważmy niepłacącą dywidendy akcję \mathcal{A} , której proces ceny S_t zadany jest następującym równaniem:

$$dS_t = S_t r dt + S_t \sigma dW(t), \quad r, \sigma > 0,$$

gdzie $W(t)$ jest procesem Wienera.

Założmy, że na rynku dostępne są dwa instrumenty pochodne na akcję \mathcal{A} . Oba wygasają w tym samym momencie T . Przyjmijmy, że ich wartości w chwili t zadane są funkcjami $P_1(S_t, t)$ oraz $P_2(S_t, t)$.

Inwestor w chwili t posiada następujące informacje:

	Instrument P_1	Instrument P_2
Parametr grecki Delta	0.45	-0.45
Parametr grecki Theta	-0.83	-1.13
Cena	0.5	$P_2(S_t, t)$

Proszę określić wartość $P_2(S_t, t)$, wiedząc, iż $r = 2\%$, $\sigma = 20\%$ oraz zachodzi:

$$S_t^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 P_1(S_t, t)}{\partial S_t^2} + \frac{\partial^2 P_2(S_t, t)}{\partial S_t^2} \right) = 100.5.$$

- (A) 1.8
- (B) 1.9
- (C) 2.0
- (D) 2.1
- (E) 2.2

Zadanie 3.

Rozważmy 20-letnią obligację korporacyjną, która na koniec każdego roku płaci kupony w wysokości 4.5% wartości nominalnej. W momencie zapadalności obligacji wypłacany jest również jej nominal.

Wiadomo, iż w sytuacji wystąpienia niewypłacalności emitenta, nie zostaną wypłacone kolejne dalsze kupony ani wartość nominalna. Posiadacz obligacji odzyska jedynie $a\%$ wartości nominalnej (przyjmujemy, że wypłata ta nastąpi na koniec okresu, w którym wystąpiła niewypłacalność emitenta).

Przyjmijmy, że w całym horyzoncie trwania obligacji rynek ocenia prawdopodobieństwa przejścia emitenta pomiędzy stanami wypłacalności i niewypłacalności w okresie jednego roku w następujący sposób:

	Emitent wypłacalny	Emitent niewypłacalny
Emitent wypłacalny	0.98	0.02
Emitent niewypłacalny	0.00	1.00

Stopa procentowa w całym okresie jest stała i wynosi 3%. Proszę oszacować a , wiedząc, iż rynkowa cena obligacji w momencie jej emisji równa jest nominalowi. Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 32.5
- (B) 31.5
- (C) 30.5
- (D) 29.5
- (E) 28.5

Zadanie 4.

Niech $S(t)$ będzie ceną w chwili t pewnej akcji, która nie płaci dywidendy. W chwili 0 rozważmy kontrakt, który po roku daje posiadaczowi wypłatę $\frac{S(1)^2}{S(0)^2}$. Intensywność oprocentowania wynosi 3.58% w skali roku, a zmienność cen akcji kształtuje się na poziomie 15%.

Cena akcji opisana jest przez proces

$$S(t) = A(t) \cdot \exp(\sigma Z \sqrt{t}), \quad t > 0,$$

gdzie $A(t)$ jest pewną funkcją rzeczywistą, a $Z \sim N(0,1)$.

Wiedząc, iż rynek nie dopuszcza arbitrażu, proszę wyznaczyć cenę kontraktu w chwili 0 (proszę podać najbliższą wartość):

- (A) 1.02
- (B) 1.03
- (C) 1.04
- (D) 1.05
- (E) 1.06

Zadanie 5.

Kredyt hipoteczny jest spłacany ratami płatnymi na końcu każdego roku, w ciągu 30 lat. Rata spłaty kredytu zwiększa się co roku o 3%. Oprocentowanie kredytu jest następujące:

- 11.0% w roku $6k + 1$,
- 10.0% w roku $6k + 2$;
- 9.0% w roku $6k + 3$;
- 9.5% w roku $6k + 4$;
- 10.5% w roku $6k + 5$;
- 11.5% w roku $6k + 6$, gdzie $k = 0,1,2,3,4,5$.

Wiadomo, że spłata kapitału dokonana w 17. racie wynosi 6 600. Proszę obliczyć ile wynosi wartość udzielonego kredytu (proszę podać najbliższą kwotę):

- (A) 415 000
- (B) 410 000
- (C) 405 000
- (D) 400 000
- (E) 395 000

Zadanie 6.

Kredyt o wartości 400 000, zaciągnięty na 30 lat, jest oprocentowany na poziomie 5% w skali roku. Warunki spłaty kredytu są następujące:

- raty płatne są na koniec każdego roku,
- raty płatne na końcu lat nieparzystych tworzą rosnący ciąg arytmetyczny o różnicy 2 000,
- raty płatne na końcu lat parzystych tworzą malejący ciąg geometryczny o ilorazie 0.95.

Wiedząc, że kwota odsetek zapłaconych w 23. racie jest równa 10 040, proszę obliczyć ile wynosi suma pierwszej i drugiej raty (proszę podać najbliższą wartość).

- (A) 44 590
- (B) 45 090
- (C) 45 590
- (D) 46 090
- (E) 46 590

Zadanie 7.

Proszę wskazać, który z poniższych wzorów wyraża $(\bar{I}\bar{a})_{\bar{n}|}$, jeśli wiadomo, że:

- $\bar{a}_{\bar{n}|} = a$,
- $\bar{a}_{2\bar{n}|} = b$,

oraz a i b są dobrane w taki sposób, że poniższe ułamki są dobrze określone.

$$(A) \frac{(a^3 \cdot b - a^4) \cdot \ln \frac{a}{b-a} - a \cdot b^4 + 2a^3}{(2b-a)^2}$$

$$(B) \frac{(a \cdot b^4 - a^3) \cdot \ln \frac{a}{b-a} - a \cdot b^3 + 2a^4}{(2b-a)^2}$$

$$(C) \frac{(a^4 \cdot b - a^3) \cdot \ln \frac{a}{b-a} - a^3 b + 2a^3}{(b-2a)^2}$$

$$(D) \frac{(a^4 \cdot b - a^3) \cdot \ln \frac{b-a}{a} - a^4 b + 2a^3}{(2b-a)^2}$$

$$(E) \frac{(a^3 \cdot b - a^4) \cdot \ln \frac{b-a}{a} - a^3 b + 2a^4}{(b-2a)^2}$$

Zadanie 8.

Rozważamy dwie terminowe renty A i B płacące równe raty na koniec każdego roku.

Wiadomo, iż:

- renta A rozpoczyna płatności w chwili $t = 1$, a renta B w chwili $t = 4$,
- renta B kończy wypłaty 4 lata później niż renta A,
- rata renty B jest 2 razy wyższa niż rata renty A,
- $\lim_{i \rightarrow 0} dur(A + B)$ wynosi 8.4, gdzie dur oznacza durację Macaulay'a, natomiast $A+B$ oznacza ciąg płatności generowany przez obie renty.

Ile wynosi $dur(A)$ w chwili $t = 0$, przyjmując, iż stopa procentowa wynosi 5% (proszę podać najbliższą wartość)?

- (A) 4.51
- (B) 5.51
- (C) 6.51
- (D) 7.51
- (E) 8.51

Zadanie 9.

Założmy, iż na rynku kapitałowym występują jedynie trzy aktywa: akcje A, akcje B oraz aktywo wolne od ryzyka C. Podaż akcji A jest taka sama jak podaź akcji B, a zatem dla portfela rynkowego (ang. market portfolio) zachodzi $M = 0.5A + 0.5B$.

Ponadto wiadomo, iż:

- stopa zwrotu portfela rynkowego wynosi = 10%,
- odchylenie standardowe stopy zwrotu akcji A wynosi 30%, a akcji B wynosi 40%,
- korelacja stóp zwrotu akcji A i akcji B wynosi 0.6,
- stopa wolna od ryzyka wynosi 3%.

Ile wynosi stopa zwrotu akcji A zgodnie z modelem Capital Asset Pricing Model (proszę podać najbliższą wartość)?

- (A) 4.75
- (B) 5.75
- (C) 6.75
- (D) 7.75
- (E) 8.75

Zadanie 10.

Dwa lata temu (w chwili $t = 0$) firma A chciała wziąć 5-letnią pożyczkę 1.7 mln dolarów ze stałym rocznym oprocentowaniem. Jednocześnie firma B chciała wziąć 5-letnią pożyczkę 5.1 mln złotych ze stałym oprocentowaniem. Poniższa tabela przedstawia kwotowania pożyczek dostępnych dla obu firm w tamtym czasie. Kurs spot wynosił wówczas 3USD/PLN (3 złote za 1-ego dolara):

	PLN	USD
Firma A	9.0%	5.0%
Firma B	8.5%	4.2%

Ostatecznie firma A wzięła pożyczkę w złotych, a firma B wzięła pożyczkę w dolarach, a następnie obie firmy zawarły za pośrednictwem instytucji finansowej C kontrakt *currency swap*, w którym odpowiednie płatności są wymieniane raz w roku na koniec roku, i który pozwolił obu firmom obniżyć oprocentowanie pożyczki o 0.1 punktu procentowego w stosunku do dostępnych kwotowań. Jaka jest wartość kontraktu *currency swap* dla firmy pośredniczącej C w chwili $t = 2$, bezpośrednio po drugiej wymianie płatności wynikających z tego kontraktu, jeśli:

- kurs spot w $t = 2$ wynosi 3.2 USD/PLN,
- terminowa struktura stóp procentowych w USA jest płaska na poziomie 4% rocznie,
- terminowa struktura stóp procentowych w Polsce jest płaska na poziomie 8% rocznie?

Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 797 000 PLN
- (B) 798 000 PLN
- (C) 799 000 PLN
- (D) 800 000 PLN
- (E) 801 000 PLN

Dystrybuanta rozkładu normalnego $N(0,1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 2 marca 2020r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	C	
3	D	
4	E	
5	A	
6	B	
7	E	
8	B	
9	E	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.