Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXI Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 18 listopada 2019r.

Matematyka ubezpieczeń na życie

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Rozważmy model ciągły ze stałym natężeniem śmiertelności μ oraz z zerowym natężeniem oprocentowania ($\delta = 0$). Pewien inwestor posiada obecnie majątek w_0 oraz planuje przejście na emeryturę za 20 lat. Rocznie inwestor będzie oszczędzał kwotę S, tj. zakłada, iż przy przejściu na emeryturę zgromadzi kwotę $w_{20} = w_0 + 20 \times S$. Inwestor chce, aby w przypadku jego zgonu przed przejściem na emeryturę rodzina otrzymała odpowiednie zabezpieczenie. Rozważa zatem zakup ubezpieczenia ze składką jednorazową, z malejącą liniowo sumą ubezpieczenia, tak aby w chwili jego śmierci $t < 20$ rodzina otrzymała kwoty:

- świadczenie z polisy $(20 - t) \times S$
- oraz odziedziczone oszczędności $w_t = w_0 + t \times S - P$, gdzie P to kwota jednorazowej składki za ubezpieczenie.

Funkcja użyteczności inwestora $u(x) = -e^{-dx}$ (dla pewnego $d > 0$). Jaką maksymalnie kwotę składki za ubezpieczenie będzie skłonny zapłacić ten inwestor?
(Wskazówka: Należy porównać $u(w_{20} - P)$ oraz $\mathrm{E}[u(w_{20} - X)]$, gdzie X – jest zmienną losową kwoty brakującej do zgromadzenia majątku w_{20}.)

(A) $\frac{1}{d} ln(\frac{\mu}{\mu+dS} e^{-20dS} + \frac{dS}{\mu+dS} e^{-20\mu})$

(B) $\frac{1}{d} ln(\frac{\mu}{\mu+dS} e^{20dS} + \frac{dS}{\mu+dS} e^{-20\mu})$

(C) $\frac{1}{d} ln(\frac{\mu}{\mu+dS} e^{20dS} + \frac{dS}{\mu+dS} e^{20\mu})$

(D) $ln(\frac{\mu}{\mu+dS} e^{-20dS} + \frac{dS}{\mu+dS} e^{-20\mu})$

(E) $ln(\frac{\mu}{\mu+dS} e^{20dS} + \frac{dS}{\mu+dS} e^{20\mu})$

Zadanie 2.

Dla życia wylosowanego z pewnej populacji, dane są następujące wielkości: q_x = 0,00264, q_{x+1} = 0,0027, i = 2% oraz aktuarialna wartość renty płatnej z góry $\ddot{a}_{x+2:\overline{n-2|}}$ = 14,6566.

Ile wynosi $A_{x:\overline{n|}}$? Proszę podać najbliższą wartość.

(A) 0,4864

(B) 0,5864

(C) 0,6864

(D) 0,7864

(E) 0,8864

Zadanie 3.

W pewnej populacji, dla $(x) = 25$ wiemy, że $p_x = 0{,}999$ oraz dla $k = 1,\ldots,15$ ${}_kp_x = (p_x)^k$. O ile zmniejszy się aktuarialna wartość 15-sto letniej renty życiowej płatnej rocznie z dołu $a_{x:\overline{15}|}$ jeżeli roczna stopa procentowa $i = 2\%$ wzrośnie do 2,5%? Podaj najbliższą wartość.

(A) 0,463

(B) 0,583

(C) 0,603

(D) 0,623

(E) 0,643

Zadanie 4.

W modelu ciągłym ze stałym natężeniem śmiertelności rozważmy dwie renty dla (x).

A) Renta na całe życie;

B) Renta pewna na czas N, przechodząca w rentę na całe życie dla ($x + N$).

Przy założeniu, iż natężenie oprocentowania jest równe natężeniu śmiertelności ($\delta = \mu$), dla jakiego N aktuarialna wartość obecna renty B jest o $\frac{1}{16}$ wyższa od wartości renty A? („Symbolicznie”: B = $1\frac{1}{16} \times$ A.)

(A) $\frac{1}{\delta}\ln(\frac{1}{4})$

(B) $\frac{1}{\delta}\ln(4)$

(C) $\delta \ln(\frac{4}{3})$

(D) $\frac{1}{\delta}\ln(\frac{3}{4})$

(E) $\frac{1}{\delta}\ln(\frac{4}{3})$

Zadanie 5.

Zakład ubezpieczeń sprzedaje w kanale sprzedaży bezpośredniej („direct") polisy ubezpieczenia na życie z trzema poziomami sumy ubezpieczenia. Dla każdej z trzech grup zakład ustalił iż wskaźnik śmiertelności jest stały. Liczba umów jakie posiada zakład w swoim portfelu w każdej z trzech grup, odpowiednie roczne wskaźniki śmiertelności oraz sumy ubezpieczenia podane są w poniższej tabeli.

Grupa	Liczba umów	Suma ubezpieczenia dla pojedynczej polisy (zł)	Wskaźnik śmiertelności
1	1 000	75 000	0,0010
2	2 000	35 000	0,0015
3	4 000	25 000	0,0015

Zakład rozważa reasekurację tego portfela polis w ramach umowy nadwyżki szkód z zachowkiem 25 000 zł.

X jest zmienną losową wyrażającą świadczenia wypłacone (na udziale własnym zakładu) w ciągu roku. Współczynnik zmienności ryzyka zdefiniowany jest jako $\frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}$.

Zakładając iż pojedyncze ryzyka w portfelu są od siebie niezależnie, proszę obliczyć różnicę pomiędzy współczynnikiem zmienności ryzyka dla całego portfela w przypadku gdy nie jest on reasekurowany oraz gdy jest reasekurowany. Proszę podać najbliższą wartość.

(A) 2%

(B) 3%

(C) 4%

(D) 5%

(E) 6%

Zadanie 6.

W modelu ciągłym ze stałym natężeniem śmiertelności rozważmy terminowe, dziesięcioletnie ubezpieczenie na życie dla (*x*), z umową dodatkową wypłacającą świadczenie z tytułu całkowitej niezdolności do pracy. Suma ubezpieczenia z tytułu śmierci oraz suma ubezpieczenia z tytułu całkowitej niezdolności do pracy są sobie równe i wynoszą 100 000 zł. Dane są:

- roczne natężenie oprocentowania $\delta = 0$
- roczne natężenie śmiertelności $\mu_{x+t} = 0{,}005$
- oraz roczne natężenie całkowitej niezdolności do pracy $\mu_{x+t}^{NP} = 0{,}001$.

Proszę obliczyć różnicę między składką jednorazową netto za to ubezpieczenie w przypadku gdy wystąpienie zdarzenia całkowitej niezdolności do pracy nie kończy ochrony z tytułu śmierci oraz składką jednorazową netto w przypadku gdy wystąpienie zdarzenia całkowitej niezdolności do pracy kończy ochronę z tytułu śmierci. Proszę podać najbliższą wartość.

(A) 29 zł

(B) 39 zł

(C) 49 zł

(D) 59 zł

(E) 69 zł

Zadanie 7.

W ubezpieczeniu na życie i dożycie, ze składką roczną płatną z góry przez 10 lat, wystawionym dla życia (x) dane są: stopa techniczna i = 1,5%, q_{x+7} = 0,00298, q_{x+8} = 0,00329, oraz $\ddot{a}_{x:\overline{10}|}$ = 9,27639.

Bezpośrednie koszty jednorazowe związane z zawarciem umowy ubezpieczenia wliczone w składkę brutto wynoszą 1000 zł.

Proszę obliczyć różnicę pomiędzy rezerwą na życie ustaloną przy użyciu składki brutto a rezerwą na życie ustaloną przy użyciu składki netto na koniec siódmego roku ubezpieczenia. Proszę podać najbliższą wartość.

(A) -217,7 zł

(B) -317,7 zł

(C) -417,7 zł

(D) -467,7 zł

(E) -517,7 zł

Zadanie 8.

Rozważmy pięcioletnie ubezpieczenie na życie i dożycie dla (x) z roczną składką regularną płatną z góry. Składka roczna netto wynosi 5 000 zł i ustalona została przy założeniu stopy technicznej 2%. Gwarantowana kwota na dożycie wynosi 25 000 zł. Poniższa tabela zestawia dane dotyczące tego kontraktu. Rzeczywista stopa zwrotu jest stopą zwrotu jaką zrealizował zakład ubezpieczeń na aktywach pokrywających rezerwę matematyczną netto.

Rok k	1	2	3	4	5
q_{x+k-1}	0,00409	0,00452	0,00499	0,00550	0,00605
Rezerwa netto na koniec roku k	4 814	9 717	14 712	19 804	25 000
Osiągnięta stopa zwrotu	2,4%	2,2%	2,1%	2,0%	1,3%

Przy założeniu, iż śmiertelność jaką odnotował zakład była na poziomie przyjętej w wycenie składki, proszę obliczyć jaką łączną stratę/zysk techniczny zrealizował zakład w ciągu pięciu lat. Podaj najbliższą wartość:

(A) -256,20 zł

(B) -186,20 zł

(C) -146,20 zł

(D) -116,20 zł

(E) -96,20 zł

Zadanie 9.

Rozważmy ciągłą rentę małżeńską wystawioną dla mężczyzny (x) = 65 wylosowanego z populacji de Moivre'a z $\omega = 95$ oraz kobiety (y) = 65 wylosowanej z populacji de Moivre'a z $\omega = 105$. Renta wypłaca z intensywnością roczną poniższe kwoty:

- 10 000 zł jeśli oboje małżonkowie żyją
- 8 000 zł gdy jedno z małżonków nie żyje
- (oraz 0 zł po śmierci obojga małżonków).

Proszę obliczyć jednorazową składkę netto przy założeniu intensywności oprocentowania $\delta = 0$ oraz zakładając, iż T(x), T(y) są niezależne. Proszę podać najbliższą wartość.

(A) 132 500 zł

(B) 152 500 zł

(C) 172 500 zł

(D) 192 500 zł

(E) 212 500 zł

Zadanie 10.

Rozważmy model ciągły planu emerytalnego, ze stałymi natężeniami prawdopodobieństw.

Pracownik przystępuje do planu w wieku (x) a na emeryturę przejdzie za 40 lat. Wynagrodzenie pracownika w chwili przystąpienia do planu emerytalnego ($t = 0$) wynosi 48 tyś zł i wzrasta w sposób ciągły z rocznym natężeniem δ. Składka odprowadzana do planu emerytalnego za tego pracownika (w formie renty ciągłej) do czasu osiągnięcia wieku emerytalnego lub wystąpienia jednego z dwóch zdarzeń śmierci lub opuszczenia planu jeśli którekolwiek z tych zdarzeń nastąpi wcześniej, wynosi 5% bieżącego wynagrodzenia.

W przypadku zajścia zdarzenia zgonu pracownika przed osiągnięciem wieku emerytalnego uposażeni otrzymają 150% wartości zgromadzonego kapitału.

Dane są:

- natężenie śmiertelności $\mu^d = 0{,}01$,
- natężenie prawdopodobieństwa odejścia z planu $\mu^w = 0{,}05$
- natężenie wzrostu wynagrodzeń oraz natężenie oprocentowania, które są sobie równe i wynoszą $\delta = 0{,}02$.

Proszę podać jaka jest, na dzień przystąpienia do planu, aktuarialna wartość obecna wypłaconych świadczeń z tytułu śmierci pracownika przed osiągnięciem wieku emerytalnego. Podaj najbliższą odpowiedź.

(A) 4 915,6 zł

(B) 5 915,6 zł

(C) 6 915,6 zł

(D) 7 915,6 zł

(E) 8 915,6 zł

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 18 listopada 2019r.

Matematyka ubezpieczeń na życie

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	C	
3	A	
4	E	
5	B	
6	A	
7	B	
8	D	
9	E	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.