

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXX Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 4 marca 2019r.**

**Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i  
majątkowych**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

**Czas trwania egzaminu: 100 minut**

**Zadanie 1.**

Dla pewnego ubezpieczonego liczby szkód  $N_1, N_2, N_3, N_4$  w kolejnych czterech latach są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie równomiernym:

$$\Pr(N_1 = k) = 1/10, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 9$$

Prawdopodobieństwo, że w ciągu 4 lat ubezpieczony będzie miał łącznie dokładnie 7 szkód wynosi:

- (A) 0.90%
- (B) 1.05%
- (C) 1.20%
- (D) 1.40%
- (E) 1.65%

**Zadanie 2.**

Mamy niepełną informację o rozkładzie wartości pojedynczej szkody  $Y$ . O dystrybucie tej zmiennej wiemy, że:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } y \leq 0 \\ 1 - \exp(-y) & \text{gdy } y \in [0, 1) \cup [2, \infty) \end{cases}$$

Nie wiemy natomiast jak dystrybucja przebiega na odcinku  $y \in [1, 2)$ . Opierając się na tych informacjach szacujemy od dołu wartość oczekiwaną nadwyżki szkody ponad  $3/2$ . Najlepsze oszacowanie (największa z takich liczb  $g$ , że mamy pewność iż  $E[(Y - 3/2)_+] \geq g$ ), wynosi:

- (A)  $\frac{1}{2} \exp(-1)$
- (B)  $\frac{1}{2} [\exp(-1) + \exp(-2)]$
- (C)  $\exp(-3/2)$
- (D)  $\frac{3}{2} \exp(-2)$
- (E)  $\frac{1}{3} \left[ \exp(-1) + \exp\left(-\frac{3}{2}\right) + \exp(-2) \right]$

**Zadanie 3.**

Przyjmijmy oznaczenie:

$$\bar{x}_d = \begin{cases} x - d & \text{jeśli } x > d \\ 0 & \text{jeśli } x \leq d \end{cases}$$

Jeśli więc zmienna losowa  $X$  wyraża wartość szkody, to zmienna  $\bar{X}_d$  nadwyżkę szkody ponad  $d$ . Załóżmy teraz, że  $X$  ma rozkład dyskretny określony na liczbach naturalnych.

Jeśli w dodatku ograniczymy zainteresowanie do zmiennych  $\bar{X}_d$  dla wartości  $d = 0, 1, 2, 3, \dots$ , to wartości oczekiwane tych zmiennych spełniają zależność rekurencyjną:

$$E(\bar{X}_{d+1}) = E(\bar{X}_d) - \Pr(X > d)$$

Jeśli wiesz, jak pokazać prawdziwość powyższej zależności, łatwo wskażesz, która z zależności poniższych (dotyczących momentów zwykłych drugiego rzędu) jest prawdziwa:

(A)  $E(\bar{X}_{d+1}^2) = E(\bar{X}_d^2) - 2 \cdot E(\bar{X}_d) + \Pr(X > d)$

(B)  $E(\bar{X}_{d+1}^2) = E(\bar{X}_d^2) - 2 \cdot \Pr(X > d)$

(C)  $E(\bar{X}_{d+1}^2) = E(\bar{X}_d^2) - 2 \cdot E(\bar{X}_d) - \Pr(X > d)$

(D)  $E(\bar{X}_{d+1}^2) = E(\bar{X}_d^2) - 2 \cdot E(\bar{X}_d)$

(E)  $E(\bar{X}_{d+1}^2) = E(\bar{X}_d^2) - E(\bar{X}_d)$

**Zadanie 4.**

Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:

$$U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \text{ gdzie:}$$

- $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$  jest procesem o przyrostach i.i.d takich, że  $\Pr(W_1 \geq 0) = 1$ .
- Zakładamy, że  $c < E(W_1) < \infty$ , wobec czego ruina jest pewna.

Niech:

- $T(u) = \inf \{n : n \in \{0, 1, 2, \dots\}, U_n < 0\}$  oznacza czas ruiny, zaś:
- $E(T(u))$  oczekiwany czas ruiny (traktowany explicite jako funkcja zmiennej  $u$ ).

Oczywiście dla ujemnych wartości  $u$  zachodzi  $E(T(u)) = 0$ .

Która z poniższych tożsamości całkowych spełniona jest przez funkcję  $E(T(u))$  dla nieujemnych wartości  $u$ ?

(A)  $E(T(u)) = \int_0^{u+c} E(T(u+c-x)) dF_W(x)$

(B)  $E(T(u)) = 1 + \int_0^{u+c} E(T(u+c-x)) dF_W(x)$

(C)  $E(T(u)) = 1 + \int_0^{u+c} [1 + E(T(u+c-x))] dF_W(x)$

(D)  $E(T(u)) = 1 - F_W(u+c) + \int_0^{u+c} E(T(u+c-x)) dF_W(x)$

(E)  $E(T(u)) = F_W(u+c) + \int_0^{u+c} E(T(u+c-x)) dF_W(x)$

**Zadanie 5.**

Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:

$$U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

gdzie  $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$  jest procesem o przyrostach i.i.d.

Wyznaczamy składkę  $c$  przyjmując dla uproszczenia, iż prawdopodobieństwo ruiny  $\varepsilon$  spełnia równość  $\varepsilon = \exp(-Ru)$ , gdzie  $R$  to *adjustment coefficient*, zaś  $u$  to nadwyżka początkowa.

Przyjmujemy przy tym, iż zmienna  $W_1$  o wartości oczekiwanej, odchyleniu standardowym i dodatniej skośności równym odpowiednio  $\mu_W$ ,  $\sigma_W$ ,  $\gamma_W$ , posiada funkcję generującą momenty, oraz iż wyrazy wyższych rzędów w rozwinięciu logarytmu funkcji generującej momenty są pomijalne.

Przyjmujemy także konkretne założenia liczbowe:

- nadwyżka początkowa jest równa:  $u = 3\sigma_W$ ,
- przyjęty poziom bezpieczeństwa wynosi:  $\varepsilon = \exp(-3)$

W rezultacie otrzymujemy formułę składki:

$$c = \mu_W + \sigma_W(a_0 + a_1\gamma_W)$$

Wyznacz parametry  $a_0$  oraz  $a_1$  formuły.

(A)  $(a_0, a_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$

(B)  $(a_0, a_1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(C)  $(a_0, a_1) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right)$

(D)  $(a_0, a_1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{6}\right)$

(E)  $(a_0, a_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

**Zadanie 6.**

Proces nadwyżki ubezpieczyciela ma postać:

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$$

gdzie:

- $u$  – to wartość początkowa nadwyżki,
- $S(t)$  - to złożony proces Poissona z parametrem częstotliwości  $\lambda$ , wyrażający zagregowaną wartość szkód do momentu  $t$ ,
- składka  $c$  równa jest oczekiwanej wartości szkód za okres jednostkowy pomnożonej przez czynnik  $(1 + \theta)$ .

Niech:

- $l_1$  będzie wartością, o którą nadwyżka spada poniżej poziomu wyjściowego w pierwszym momencie, w którym do spadku dochodzi (o ile do niego dojdzie),
- $L = l_1 + \dots + l_N$  to maksymalna całkowita strata, gdzie  $l_k$  to  $k$ -ty z kolei spadek poniżej poprzedniego rekordu dolnego, zaś  $N$  to liczba wystąpień takich spadków w całym przebiegu procesu  $U(t)$ .

Jeżeli zmienna  $l_1$  ma rozkład określony na przedziale  $[0, 2]$  o gęstości równej:

$$f_l(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{dla } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

to funkcja generująca momenty  $M_L(r)$  dla  $r$  nierównego zeru jest postaci:

$$(A) \quad \frac{r\theta}{1 + r(1 + \theta) - \frac{1}{2} e^r (e^r + 1)}$$

$$(B) \quad \frac{3r\theta}{2 + 3r(1 + \theta) - \frac{1}{2} e^r (e^r + 1)}$$

$$(C) \quad \frac{3r\theta}{1 + 3r(1 + \theta) - \frac{1}{2} e^r (e^r + 1)}$$

$$(D) \quad \frac{3r\theta}{1 + 3r(1 + \theta) - e^r (e^r + 1)}$$

$$(E) \quad \frac{3r\theta}{2 + 3r(1 + \theta) - e^r (e^r + 1)}$$

**Zadanie 7.**

W procesie  $U(t)$  nadwyżki ubezpieczyciela  $c$  oznacza intensywność składki na jednostkę czasu,  $u = U(0)$  oznacza nadwyżkę początkową, zaś para  $(T_n, Y_n)$  oznacza moment zajścia i wartość  $n$ -tej szkody. Oznaczmy przez  $\Delta T_n = T_n - T_{n-1}$  czas oczekiwania na  $n$ -tą szkodę (oczywiście  $\Delta T_1 = T_1$ ).

Przyjmujemy, że:

- $\Delta T_1, Y_1, \Delta T_2, Y_2, \Delta T_3, Y_3, \dots$  są niezależne,
- $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \dots$  mają ten sam rozkład,
- $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  mają ten sam rozkład

Rozważmy model 1, gdzie:

- $\Delta T_1$  ma rozkład Gamma z parametrami  $(1, \lambda)$  o wartości oczekiwanej  $\lambda^{-1}$ ,
- $Y_1$  ma rozkład Gamma z parametrami  $(\alpha, \beta)$  o wartości oczekiwanej  $\alpha\beta^{-1}$ ;

oraz model 2, gdzie:

- $\Delta T_1$  ma rozkład Gamma z parametrami  $(2, \lambda)$  o wartości oczekiwanej  $2\lambda^{-1}$ ,
- $Y$  ma rozkład Gamma z parametrami  $(2\alpha, \beta)$  o wartości oczekiwanej  $2\alpha\beta^{-1}$ ;

Oznaczmy współczynnik dopasowania oraz funkcję prawdopodobieństwa ruiny w pierwszym modelu przez  $R_1$  oraz  $\Psi_1(u)$ , zaś w drugim przez  $R_2$  oraz  $\Psi_2(u)$ .

Założmy, że  $c > \lambda\beta^{-1}$ .

Spośród poniższych zdań wybierz zdanie prawdziwe:

- (A)  $R_1 = R_2$  oraz  $\forall_{u \geq 0} \Psi_1(u) < \Psi_2(u)$
- (B)  $R_1 = R_2$  oraz  $\forall_{u \geq 0} \Psi_1(u) > \Psi_2(u)$
- (C)  $R_1 > R_2$  oraz  $\forall_{u \geq 0} \Psi_1(u) < \Psi_2(u)$
- (D)  $R_1 < R_2$  oraz  $\forall_{u \geq 0} \Psi_1(u) > \Psi_2(u)$
- (E) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa



**Zadanie 8.**

Liczba szkód  $N$  w ciągu roku w pewnym ubezpieczeniu ma rozkład Poissona z oczekiwaną liczbą szkód równą  $E(N) = 22.62$ .

Wartość każdej ze szkód  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  ma ten sam rozkład Pareto o dystrybuancie określonej na półosi nieujemnej wzorem:

$$F_{Y_1}(y) = 1 - \left(\frac{1}{1+y}\right)^2$$

Wartości poszczególnych szkód i liczba szkód są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Niech:

$$M := \begin{cases} \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\} & \text{jeżeli } N > 0 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Kwantyl rzędu 0.95 rozkładu zmiennej  $M$ , a więc taka liczba  $y_{0.95}$ , dla której:

$$\Pr(M \leq y_{0.95}) = 0.95$$

wynosi:

- (A)  $y_{0.95} = 16$
- (B)  $y_{0.95} = 17$
- (C)  $y_{0.95} = 18$
- (D)  $y_{0.95} = 19$
- (E)  $y_{0.95} = 20$

**Zadanie 9.**

Łączna wartość szkód z pewnego ryzyka  $X = Y_1 + \dots + Y_N$  jest zmienną losową o rozkładzie złożonym. Liczba szkód  $N$  ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą  $3\ln(2)$ , zaś wartość pojedynczej szkody  $Y$  ma rozkład dany wzorem:

$$\Pr(Y_1 = k) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{0.5^k}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Prawdopodobieństwo, iż łączna wartość szkód wyniesie 6, równa jest:

(A)  $\frac{3}{128}$

(B)  $\frac{4}{128}$

(C)  $\frac{5}{128}$

(D)  $\frac{6}{128}$

(E)  $\frac{7}{128}$

**Zadanie 10.**

W kolejnych okresach czasu  $j = 1, 2, 3$  ubezpieczony, charakteryzujący się parametrem ryzyka  $\Theta$ , generuje  $N_j$  szkód. Dla danego  $\Theta = \theta$  zmienne  $N_1, N_2, N_3$  są warunkowo niezależne i mają taki sam rozkład:

$$Pr(N_1 = k | \Theta = \theta) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Parametr ryzyka  $\Theta$  przyjmuje w populacji ubezpieczonych wartości: 1 lub 2. Mamy do czynienia z dwuetapowym doświadczeniem losowym:

- najpierw losujemy z populacji ubezpieczonego, a wraz z nim jego wartość parametru ryzyka, zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa:  
 $Pr(\Theta = 1) = 0.5 = Pr(\Theta = 2)$
- następnie obserwujemy liczby generowanych przez niego szkód  $N_1$  i  $N_2$ .

Wnioskujemy na tej podstawie o liczbie szkód w następnym okresie, czyli  $N_3$ .

$Pr(N_3 = 0 | N_1 + N_2 = 2)$  wynosi w przybliżeniu:

- (A) 0.45
- (B) 0.35
- (C) 0.29
- (D) 0.25
- (E) 0.22

**Egzamin dla Aktuariuszy**  
**Sesja egzaminacyjna w dniu 4 marca 2019r.**

**Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych**

**Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	C	
2	D	
3	A	
4	B	
5	A	
6	E	
7	B	
8	E	
9	E	
10	C	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.