

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXIX Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 26 listopada 2018r.**

**Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i  
majątkowych**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

**Czas trwania egzaminu: 100 minut**

**Zadanie 1.**

Pewien podmiot kieruje się w decyzjach maksymalizacją wartości oczekiwanej funkcji użyteczności o postaci:

$$u(x) = \ln(x).$$

Tymczasem majątek tego podmiotu wynosi  $w$ . Połowa tego majątku narażona jest jednak na ryzyko całkowitej utraty, co może nastąpić z prawdopodobieństwem  $q$ . Od tego ryzyka można się na rynku ubezpieczyć. Rynek oferuje kontrakty z udziałem własnym ubezpieczonego, wyceniane według wartości oczekiwanego odszkodowania pomnożonej przez czynnik  $(1 + \theta)$ . Przy założeniu, iż:

$$w = 2, \quad q = 1/5, \quad \theta = 1/4,$$

podmiot ten wybierze kontrakt z udziałem własnym w wysokości:

- (A) 0
- (B)  $\frac{23}{30}$
- (C)  $\frac{10}{15}$
- (D)  $\frac{7}{15}$
- (E) 1 (tzn. nie ubezpieczy się wcale)

**Zadanie 2.**

Proces nadwyżki ubezpieczyciela ma postać:

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$$

gdzie:

- $u$  - wartość początkowa nadwyżki,
- $S(t)$  - to złożony proces Poissona z parametrem częstotliwości  $\lambda$ , wyrażający zagregowaną wartość szkód do momentu  $t$ ,
- składka  $c$  równa jest oczekiwanej wartości szkód za okres jednostkowy pomnożonej przez czynnik  $(1 + \theta)$ ,

oraz gdzie wartość pojedynczej szkody ma rozkład wykładniczy.

Wiemy, że  $\theta = 1/5$ , oraz że prawdopodobieństwo ruiny, a więc:

$$\Psi(u) = \Pr(U(t) < 0 \text{ dla pewnego } t > 0)$$

równe jest  $1/10$ .

Udziałowcy zwiększyli nadwyżkę początkową dwukrotnie - do wysokości  $2u$ .

Jeśli pozostałe parametry procesu nie uległy zmianie, prawdopodobieństwo ruiny wyniesie teraz:

(A) 0.010

(B) 0.012

(C) 0.0144

(D)  $\frac{1}{144}$

(E) za mało danych do udzielenia odpowiedzi liczbowej

**Zadanie 3.**

Proces nadwyżki ubezpieczyciela ma tę samą postać co w poprzednim zadaniu:

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$$

gdzie:

- $u$  - wartość początkowa nadwyżki,
- $S(t)$  - to złożony proces Poissona z parametrem częstotliwości  $\lambda$ , wyrażający zagregowaną wartość szkód do momentu  $t$ ,
- składka  $c$  równa jest oczekiwanej wartości szkód za okres jednostkowy pomnożonej przez czynnik  $5/4$ .

Tym razem rozkład wartości pojedynczej szkody  $Y$  jest inny, a mianowicie taki, że  $\ln(Y)$  ma rozkład normalny o parametrach  $(\mu, \sigma^2) = (1, 2)$ .

Niech  $L := \sup_{t>0} (U(0) - U(t))$  oznacza maksymalną możliwą stratę.

Jej wartość oczekiwana wynosi:

- (A)  $e^3$
- (B)  $e^4$
- (C)  $e^5$
- (D)  $2e^3$
- (E)  $2e^4$

**Zadanie 4.**

W kolejnych latach ubezpieczony charakteryzujący się wartością  $\lambda$  parametru ryzyka  $\Lambda$  generuje szkody w liczbie  $N_t$ :

$$\Pr(N_t = k_t | \Lambda = \lambda) = \frac{\lambda^{k_t}}{k_t!} \cdot e^{-\lambda}, \quad t = 1, 2;$$

przy czym:

$$\Pr(N_1 = k_1 \wedge N_2 = k_2 | \Lambda = \lambda) = \Pr(N_1 = k_1 | \Lambda = \lambda) \cdot \Pr(N_2 = k_2 | \Lambda = \lambda).$$

Efekt losowania ubezpieczonego z populacji potencjalnych ubezpieczonych opisuje rozkład:

$$f_{\Lambda}(x) = \begin{cases} 100xe^{-10x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

Przeprowadzamy doświadczenie dwuetapowe: najpierw losujemy ubezpieczonego z populacji, następnie ubezpieczony ten generuje szkody w dwóch kolejnych latach w liczbie  $N_1$  i  $N_2$ , odpowiednio.

Wobec tego współczynnik korelacji liniowej  $\frac{\text{cov}(N_1, N_2)}{\sqrt{\text{var}(N_1)\text{var}(N_2)}}$  wynosi:

- (A) 1/5
- (B) 1/10
- (C) 1/11
- (D) 1/50
- (E) 1/55

**Zadanie 5.**

Rozkład wartości szkody  $Y$  określony jest na zbiorze liczb naturalnych. W tabeli podane są wartości oczekiwane nadwyżki szkody ponad  $d$  dla kolejnych (naturalnych) liczb  $d$ :

$d$	7	8	9	10
$E[(Y - d)_+]$	2.42	2.10	1.85	1.65

Wartość  $\Pr(Y = 8)$  wynosi:

- (A) 0.32
- (B) 0.25
- (C) 0.15
- (D) 0.07
- (E) 0.05

**Zadanie 6.**

Ryzyko generuje szkody zgodnie ze złożonym procesem Poissona, z częstotliwością  $1/5$  rocznie; wartość pojedynczej szkody ma rozkład wykładniczy z niezmienną w czasie wartością oczekiwaną równą 5000.

Odstępy w czasie między momentami zajścia szkód a momentami wypłaty odpowiadających im odszkodowań są także niezależnymi (nawzajem oraz od przebiegu złożonego procesu Poissona) zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym, z wartością oczekiwaną równą  $1/2$  roku.

Składka za ubezpieczenie pełne od tego ryzyka na okres roku płatna jest jednorazowo z góry. Niech  $i$  oznacza efektywną stopę procentową (roczną), a  $d$  oraz  $\delta$  odpowiednio efektywną stopę dyskonta i natężenie oprocentowania. Składka równa zdyskontowanym oczekiwany wypłatom odszkodowań wynosi:

(A)  $1000 \cdot \frac{d}{\delta} \cdot \frac{2}{2 + \delta}$

(B)  $1000 \cdot \frac{d}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + \delta}$

(C)  $1000 \cdot (1 - d)$

(D)  $1000 \cdot \frac{\delta}{i} \cdot (1 - d)$

(E)  $1000 \cdot \frac{\delta}{i} \cdot \sqrt{1 - d}$

**Zadanie 7.**

Liczba szkód  $N$  w ciągu roku w pewnym ubezpieczeniu ma rozkład ujemny dwumianowy:

$$\Pr(N = k) = (k + 1)(1 - q)^2 q^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Wartość każdej ze szkód  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  ma ten sam rozkład Pareto o dystrybuancie określonej na półosi nieujemnej wzorem:

$$F_{Y_1}(y) = 1 - \left(\frac{1}{1 + y}\right)^2$$

Wartości poszczególnych szkód i liczba szkód są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Niech:

$$M := \begin{cases} \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\} & \text{jeżeli } N > 0 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Wartość parametru  $q$  jest równa  $9/10$ . Kwantyl rzędu  $0.81$  rozkładu zmiennej  $M$ , a więc takiej liczby  $y_{0.81}$ , dla której:

$$\Pr(M \leq y_{0.81}) = 0.81$$

wynosi:

- (A)  $y_{0.81} = 7.5$
- (B)  $y_{0.81} = 8$
- (C)  $y_{0.81} = 8.5$
- (D)  $y_{0.81} = 9$
- (E)  $y_{0.81} = 9.5$



**Zadanie 8.**

W jednorodnym portfelu składającym się z niezależnych ryzyk pojedyncze ryzyko generuje szkody (jedną lub więcej) z prawdopodobieństwem  $q$ . Parametr  $q$  jest znany. Ponadto wiemy, że liczba ryzyk które wygenerowały szkody (jedną lub więcej) wyniosła  $N_1$ . Niestety zagubiliśmy informacje o liczbie ryzyk bezszkodowych  $N_0$ , nie znamy więc całkowitej liczby ryzyk  $N = N_0 + N_1$ .

Jeśli  $q = 1/5$ , to warunkowa wartość oczekiwana  $E(N|N_1 = 80)$  wynosi:

- (A) 400
- (B) 401
- (C) 402
- (D) 403
- (E) 404

**Zadanie 9.**

Proces pojawiania się szkód jest procesem Poissona z liczbą szkód w ciągu roku  $N$  o wartości oczekiwanej równej  $\lambda$ , a wartości pojedynczych szkód (niezależne nawzajem i od procesu pojawiania się szkód) mają rozkład określony na przedziale  $(0, S)$ .

Ubezpieczenie roczne pokrywa wszystkie szkody, z tym że oprócz składki początkowej w kwocie  $cS$  ubezpieczony po każdej szkodzie dopłaca za odnowienie pierwotnej sumy ubezpieczenia składkę odnowieniową skalkulowaną w oparciu zasadę *pro rata temporis*, a więc:

- po szkodzie  $k$ -tej o wysokości  $Y_k$ , do której doszło w momencie czasu  $T_k$  (przy założeniu że ten moment nastąpił przed upływem roku, a więc że  $T_k < 1$ ), dopłata wynosi  $cY_k(1 - T_k)$

Całkowita składka wynosi więc  $\pi = cS + c \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(1 - T_k)_+$ .

Jeśli parametry zadania wynoszą:

$$\lambda = 1/2, \quad E(Y_1) = 10, \quad \text{var}(Y_1) = 170,$$

to wariancja składki całkowitej  $\text{var}(\pi)$  wynosi

- (A)  $35c^2$
- (B)  $40c^2$
- (C)  $45c^2$
- (D)  $50c^2$
- (E)  $55c^2$

**Zadanie 10.**

W pewnym portfelu ubezpieczeń szkody zawsze zgłaszane są nie później, niż w roku następującym po roku zajścia. Niech z ogólnej liczby  $N$  szkód zaszłych w danym roku  $N_0$  oznacza liczbę szkód zgłoszonych w tym samym roku, zaś  $N_1$  liczbę szkód zgłoszonych w roku następnym. Załóżmy, że:

Ogólna liczba szkód  $N$  ma rozkład dwumianowy z parametrami  $(n, q)$  (liczba prób, p-stwo sukcesu w pojedynczej próbie), zaś zmienne  $N_0$  oraz  $N_1$  mają rozkłady złożone:

- $N_0 = M_1 + M_2 + \dots + M_N$ ,
- $N_1 = (1 - M_1) + (1 - M_2) + \dots + (1 - M_N)$ ,

gdzie pojedynczy składnik  $M_k$  przyjmuje wartość zero, gdy  $k$ -ta szkoda zgłoszona została w tym samym roku w którym zaszła, zaś wartość 1 jeżeli zgłoszenie nastąpiło w roku następnym.

Na koniec roku dokonujemy predykcji liczby niezgłoszonych jeszcze szkód z tego roku:

$$\text{Pred}(N_1|N_0) = a + bN_0,$$

przy czym dobieramy współczynniki  $a$  oraz  $b$  tak, by zminimalizować błąd średniokwadratowy predyktora.

Jeśli parametry zadania wynoszą:

$(n, q) = (1070, 1/10)$ , oraz  $\Pr(M_1 = 1) = 2/3$ ,

zaś liczba szkód zgłoszonych  $N_0$  wyniosła 90,

to wartość naszego predyktora wyniesie:

- (A) 35
- (B)  $35\frac{1}{3}$
- (C)  $35\frac{2}{3}$
- (D) 36
- (E)  $36\frac{1}{3}$

---

**Egzamin dla Aktuariuszy**  
**Sesja egzaminacyjna w dniu 26 listopada 2018r.**

**Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych**

**Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : ..... KLUCZ ODPOWIEDZI .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	B	
3	E	
4	C	
5	D	
6	A	
7	B	
8	E	
9	C	
10	A	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.