Zadanie 1

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi przy danym $\Lambda = \lambda$. Zmienne X_i, $i = 1,2,\ldots,n$, mają warunkowe rozkłady wykładnicze o wartości oczekiwanej $\frac{1}{\lambda}$, zmienne losowe Y_i, $i = 1,2,\ldots,n$, mają rozkłady dwupunktowe $P(Y_i = 1) = 0{,}75 = 1 - P(Y_i = 0)$. Rozkład brzegowy zmiennej Λ jest rozkładem gamma o gęstości

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{8}{3}\lambda^3 e^{-2\lambda} & \text{gdy } \lambda > 0 \\ 0 & \text{gdy } \lambda \le 0 \end{cases}.$$

Niech $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ i $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i$.

Oblicz współczynnik kowariancji $Cov(S,T)$.

(A) 0

(B) $\frac{1}{2}n\left(1 + \frac{1}{3}n\right)$

(C) $\frac{1}{2}n$

(D) $\frac{1}{6}n^2$

(E) $\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n$

Zadanie 2

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_6$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i wariancją $\frac{1}{\theta}$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Zakładamy, że parametr θ ma rozkład a priori o gęstości

$$p(\theta) = \begin{cases} \theta \exp(-\theta) & gdy\ \theta > 0 \\ 0 & gdy\ \theta \le 0 \end{cases}.$$

Wyznaczamy bayesowski przedział ufności dla parametru $\frac{1}{\theta}$ postaci $[a, b]$ taki, że

$$\Pi\left(\frac{1}{\theta} < a \mid x\right) = \Pi\left(\frac{1}{\theta} > b \mid x\right) = 0{,}05,$$

gdzie $\Pi(\cdot \mid x)$ oznacza prawdopodobieństwo przy rozkładzie a posteriori, gdy zaobserwowana wartość próbki losowej jest równa $x = (x_1, x_2, \ldots, x_6)$. Tak otrzymany przedział jest równy

(A) $\left[\frac{2 + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{26{,}296}, \frac{2 + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{7{,}962}\right]$

(B) $\left[\frac{2 + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{18{,}307}, \frac{2 + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{3{,}940}\right]$

(C) $\left[\frac{2 + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{23{,}685}, \frac{2 + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{6{,}571}\right]$

(D) $\left[\frac{2 + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{15{,}507}, \frac{2 + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{2{,}733}\right]$

(E) $\left[\frac{2 + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{11{,}071}, \frac{2 + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{1{,}146}\right]$

Zadanie 3

Niech $X_1, X_2, X_3, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale (0, 1). Niech N będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej 4, niezależną od zmiennych $X_1, X_2, X_3, \ldots$.
Niech

$$M = \begin{cases} \max\{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N\} & gdy\ N > 0 \\ 0 & gdy\ N = 0 \end{cases}$$

Wyznacz warunkową wartość oczekiwaną $E(N|M=0{,}5)$.

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 2,5

Zadanie 4

Zakładając, że obserwacje $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ stanowią próbkę losową z rozkładu Weibulla o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{2\sqrt{x}} e^{-\theta\sqrt{x}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem, wyznaczono wartość estymatora największej wiarogodności parametru θ i otrzymano $\hat{\theta} = 1{,}5$. W próbce były dwie obserwacje o wartości 4, a pozostałe dziesięć obserwacji miało wartości mniejsze od 4. Okazało się, że w rzeczywistości zaobserwowane wartości były realizacjami zmiennych losowych $X_i = \min\{Y_i, 4\}$, gdzie Y_i, $i = 1,2,\ldots,12$, są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości f_θ. Wyznaczyć wartość estymatora największej wiarogodności parametru θ po uwzględnieniu modyfikacji założeń.

(A) 1

(B) $\frac{6}{5}$

(C) $\frac{5}{6}$

(D) $\frac{5}{4}$

(E) $\frac{4}{5}$

Zadanie 5

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_5$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$p_{\theta_1}(x) = \begin{cases} \frac{\theta_1}{(1+x)^{\theta_1+1}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases},$$

a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_4$ niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$p_{\theta_2}(x) = \begin{cases} \frac{\theta_2}{(1+x)^{\theta_2+1}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases},$$

gdzie θ_1, θ_2 są nieznanymi parametrami dodatnimi. Wszystkie zmienne są niezależne. Niech $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ będą estymatorami największej wiarogodności parametrów θ_1 i θ_2 w oparciu o próby $X_1, X_2, \ldots, X_5$ i $Y_1, Y_2, \ldots, Y_4$ odpowiednio. Weryfikujemy hipotezę $H_0: \theta_1 = \theta_2$ przy alternatywie $H_1: \theta_1 > \theta_2$ testem o obszarze krytycznym

$$K = \left\{ \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2} > c \right\},$$

gdzie c jest stałą dobraną tak, by test miał rozmiar 0,05.
Wtedy c jest równe

(A) 3,072

(B) 3,347

(C) 5,192

(D) 6,256

(E) 5,057

Zadanie 6

Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x,y)=\begin{cases}\exp(-x) & \text{gdy } \ 0<y<1 \text{ i } x>0\\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.}\end{cases}$$

Niech $V = X + Y$ i $Z = X - Y$. Wtedy $P(Z > 1|V = 2)$ jest równe

(A) $\frac{\sqrt{e}-1}{e^2-1}$

(B) $\frac{e-\sqrt{e}}{e\sqrt{e}}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

(D) $\sqrt{e}-1$

(E) $\frac{\sqrt{e}-1}{e-1}$

Zadanie 7

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej 0 i nieznanej wariancji σ^2. Rozważamy estymatory odchylenia standardowego σ postaci $\hat{\sigma}_c = c\sum_{i=1}^{n}|X_i|$. Niech $\hat{\sigma}_{\bar{c}}$ oznacza estymator o najmniejszym błędzie średniokwadratowym w klasie rozważanych estymatorów. Wtedy $\bar{c}$ jest równe

A) $\dfrac{2\sqrt{2\pi}}{2\pi + n - 1}$

(B) $\dfrac{1}{n-1}$

(C) $\dfrac{1}{n}$

(D) $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\pi + 2n - 2}$

(E) $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\pi + 2n}$

Zadanie 8

Zakładamy, że zależność czynnika Y od czynnika x (nielosowego) opisuje model regresji liniowej $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, gdzie błędy ε_i są niezależne i mają rozkłady normalne o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 1. Obserwujemy zmienne losowe $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ przy danych wartościach $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Test najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy

$H_0 : \beta_0 = 0$ i $\beta_1 = 1$

przy alternatywie

$H_1 : \beta_0 = -2$ i $\beta_1 = 2$

na poziomie istotności 0,05 odrzuca hipotezę H_0, gdy spełniona jest nierówność

(A) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - x_i)(x_i - 2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(2 - x_i)^2}} > 1{,}645$$

(B) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - 1)(x_i - 2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(2 - x_i)^2}} > 1{,}645$$

(C) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i(x_i - 2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(2 - x_i)^2}} > 1{,}645$$

(D) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - x_i)(2 - x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(2 - x_i)^2}} > 1{,}645$$

(E) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - 1)(2 - x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(2 - x_i)^2}} > 1{,}645$$

Zadanie 9

Wykonujemy niezależnie rzuty symetryczną kostką do gry tak długo, aż uzyskamy sześć oczek w jednym rzucie. Oblicz prawdopodobieństwo, że wykonano siedem rzutów, jeśli wiadomo, że dwa razy wypadły trzy oczka.

(A) $\frac{80}{729}$

(B) $\frac{160}{729}$

(C) $\frac{80}{243}$

(D) $\frac{10}{729}$

(E) $\frac{10}{243}$

Zadanie 10

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu ciągłego, symetrycznego, o ściśle rosnącej dystrybuancie o medianie m.
Wtedy $P(X_{3:10} < m < X_{7:10})$ jest równe

(A) $\frac{111}{128}$

(B) $\frac{95}{128}$

(C) $\frac{84}{128}$

(D) $\frac{114}{128}$

(E) $\frac{99}{128}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 12 czerwca 2017 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	B	
3	C	
4	D	
5	A	
6	E	
7	D	
8	A	
9	A	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.e