

Zadanie 1

Rozważamy model regresji liniowej postaci $Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, gdzie a i b są nieznanymi parametrami rzeczywistymi, $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = x_5 = 5$, a ε_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 0 i nieznannej wariancji $\sigma^2 > 0$.

Hipotezę $H_0 : b = 0$ przy alternatywie $H_1 : b \neq 0$ weryfikujemy testem o obszarze

krytycznym postaci $\left\{ \left| \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}} \right| > c \right\}$, gdzie \hat{b} i $\hat{\sigma}$ są estymatorami największej

wiarogodności parametrów b i σ , a stała c dobrana jest tak, aby test miał rozmiar 0,05. Stała c jest równa

- A) 0,633
- (B) 1,027
- (C) 0,529
- (D) 0,776
- (E) 0,796

Zadanie 2

Obserwujemy 9 niezależnych zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_9 o tym samym rozkładzie o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{gdy } x \in (0,1) \\ 0 & \text{gdy } x \notin (0,1) \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważmy test jednostajnie najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy $H_0 : \theta = 1$ przy alternatywie $H_1 : \theta > 1$ na poziomie istotności 0,05. Moc tego testu przy alternatywie $\theta = 2$ jest równa (zaznacz najlepsze przybliżenie)

- (A) 0,70
- (B) 0,30
- (C) 0,97
- (D) 0,41
- (E) 0,59

Zadanie 3

W urnie znajduje się trzydzieści kul, na każdej narysowana jest litera i cyfra. Mamy

6 kul oznaczonych X1

10 kul oznaczonych Y1

8 kul oznaczonych X2

6 kule oznaczone Y2.

Losujemy bez zwracania 12 kul. Niech N_{Y_1} określa liczbę kul oznaczonych literą Y1 wśród kul wylosowanych, a N_2 liczbę kul z cyfrą 2 wśród kul wylosowanych. Obliczyć $Var(N_{Y_1} | N_2 = 4)$.

(A) $\frac{23}{16}$

(B) $\frac{15}{8}$

(C) $\frac{11}{4}$

(D) 1

(E) $\frac{3}{2}$

Zadanie 4

Na podstawie próby losowej X_1, \dots, X_{10} , gdzie X_i , $i=1, \dots, 10$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, \theta]$ i $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem, zbudowano przedział ufności dla parametru θ na poziomie ufności 0,9 postaci

$$[T_X, aT_X],$$

gdzie T_X jest estymatorem największej wiarygodności parametru θ na podstawie próby X_1, \dots, X_{10} .

Następnie uzyskano niezależnie drugą próbę losową Y_1, \dots, Y_{15} z tego samego rozkładu i zbudowano przedział ufności dla parametru θ na poziomie ufności 0,9 postaci

$$[T_{XY}, bT_{XY}],$$

gdzie T_{XY} jest estymatorem największej wiarygodności parametru θ na podstawie próby $X_1, \dots, X_{10}, Y_1, \dots, Y_{15}$.

Oblicz prawdopodobieństwo, że tak utworzone przedziały będą rozłączne.

- (A) 0
- (B) 0,06
- (C) 0,04
- (D) 0,12
- (E) 0,18

Zadanie 5

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}$, $m, n > 1$, będzie próbką losową z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie oba parametry są nieznane. Bezpośrednio dostępne są tylko obserwacje

X_1, X_2, \dots, X_n , ale dodatkowo znamy średnią $\bar{X}_{n+m} = \frac{1}{m+n} \sum_{i=1}^{n+m} X_i$. Budujemy estymator

nieobciążony parametru σ^2 postaci $T = a \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_{n+m})^2$. Wtedy a jest równe

(A) $\frac{1}{n-1}$

(B) $\frac{1}{m-1}$

(C) $\frac{n+m}{n(n+m-1)}$

(D) $\frac{n+m}{m(n+m-1)}$

(E) $\frac{n+m}{(m-1)(n+m-1)}$

Zadanie 6

Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & \text{gdy } y > 0 \text{ i } x > 0 \text{ i } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech $V = \frac{X^2}{X^2 + Y^2}$ i $Z = X^2 + Y^2$. Wtedy

- (A) $EV = 1/3$
- (B) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej V wyraża się wzorem $g(v) = 2v$ dla $v \in (0,1)$
- (C) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej V wyraża się wzorem $g(v) = 1$ dla $v \in (0,1)$
- (D) $EZ = 1/3$
- (E) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej Z wyraża się wzorem $h(z) = 1$ dla $z \in (0,1)$

Zadanie 7

Rozważamy łańcuch Markowa X_1, X_2, \dots na przestrzeni stanów $\{0, 1, 2\}$ o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

(gdzie $P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ dla $i, j = 0, 1, 2$).

Niech $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach w zbiorze $\{0, 1\}$, niezależnych od siebie nawzajem i od zmiennych $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa:

$$P(Z_i = 1) = \frac{3}{4} \text{ i } P(Z_i = 0) = \frac{1}{4}.$$

Niech $Y_i = Z_i \cdot X_i$. Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n > Y_{n+1})$ jest równy

- (A) $\frac{32}{144}$
- (B) $\frac{57}{144}$
- (C) $\frac{35}{144}$
- (D) $\frac{26}{144}$
- (E) $\frac{41}{144}$

Zadanie 8

Zmienna losowa N ma rozkład Poissona o nieznanym wartości oczekiwanej λ .

Rozważamy losową liczbę zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_N , przy czym zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_N są niezależne wzajemnie i niezależne od zmiennej losowej N .

Każda ze zmiennych X_i ma rozkład o gęstości danej wzorem:

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.

Obserwujemy tylko te spośród zmiennych X_1, X_2, \dots, X_N , które są większe od 5. Nie wiemy ile jest pozostałych zmiennych ani jakie są ich wartości. Przypuśćmy, że zaobserwowaliśmy sześć liczb i że suma ich kwadratów jest równa 300.

Na podstawie tych danych wyznacz wartości estymatorów największej wiarygodności parametrów θ i λ .

- (A) $\hat{\theta} = 0,02$ i $\hat{\lambda} = 6e^{0,2}$
- (B) $\hat{\theta} = 0,02$ i $\hat{\lambda} = 6e^{0,5}$
- (C) $\hat{\theta} = 0,02$ i $\hat{\lambda} = 6e$
- (D) $\hat{\theta} = 0,04$ i $\hat{\lambda} = 6e$
- (E) $\hat{\theta} = 0,04$ i $\hat{\lambda} = 6e^{0,2}$

Zadanie 9

Niech $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$, $n > 2$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{(1+x)^4} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$

Niech $U = \min\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Wtedy $E(U | X_0 = 1)$ jest równa

(A) $\frac{1}{3n+2} \left(1 - \frac{1}{2^{3n+3}}\right)$

(B) $\frac{1}{3n} \left(1 - \frac{1}{2^{3n}}\right)$

(C) $\frac{1}{3n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{3n-1}}\right)$

(D) $\frac{1}{3n} \left(1 - \frac{1}{2^{3n+1}}\right)$

(E) $\frac{1}{3n+2} \left(1 - \frac{1}{2^{3n+2}}\right)$

Zadanie 10

Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o funkcji gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.

Rozważamy dwa estymatory funkcji $g(\theta) = P_{\theta}(X_1 > 2) = e^{-2\theta}$:

- $T_{1,n}$ - estymator największej wiarygodności w oparciu o próbę X_1, X_2, \dots, X_n
- $T_{2,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(X_i > 2)$, gdzie funkcja $\mathbf{1}(x > 2) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x > 2 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$.

Niech V_i oznacza wariancję asymptotyczną estymatora $T_{i,n}$, $i = 1, 2$.

Wtedy stosunek $\frac{V_1}{V_2}$ jest równy

(A) $\frac{4\theta^2}{e^{2\theta} - 1}$

(B) $\frac{\theta^2 e^{2\theta}}{e^{2\theta} - 1}$

(C) $\frac{4}{\theta^2 (e^{2\theta} - 1)}$

(D) $\frac{\theta^2}{e^{2\theta} - 1}$

(E) $\frac{1}{\theta^2 e^{2\theta}}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 05 grudnia 2016 r.**Prawdopodobieństwo i Statystyka****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	E	
3	D	
4	B	
5	C	
6	C	
7	E	
8	D	
9	C	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.